Penentuan Formulasi *Adjustable Robust Counterpart* untuk Masalah Transportasi dengan Diskon dan Pembelian dari Sumber Eksternal

Rufaida Nurnaini[1,a)], Diah Chaerani[1,b)], Sukono[1,c)]

[1]Departemen Matematika,
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Padjadjaran
Jl. Raya Bandung Sumedang KM 21 Jatinangor, Sumedang 45363

[a)]rufaida.nurnaini@gmail.com
[b)]d.chaerani@unpad.ac.id
[c)]fsukono@yahoo.com

ABSTRAK

Dalam makalah ini dibahas permasalahan transportasi dengan faktor diskon dan pembelian dari sumber eksternal. Terdapat ketidaktentuan pada jumlah permintaan konsumen sehingga menyebabkan pembelian dari sumber eksternal yang sulit di prediksi. Selain itu, terdapat jumlah kendaraan yang harus disewa dan jumlah kendaraan yang akan digunakan untuk mendapatkan potongan harga (discount) yang sesuai pada setiap pengiriman. Penyelesaian masalah tersebut diatas dilakukan dengan Adjustable Robust Counterpart. Model awal dalam bentuk masalah transportasi yang dapat diselesaikan dengan Pemrograman Linear, diubah menjadi bentuk Robust. Sehingga, bedasarkan hasil eksperimen numerik dapat disimpulkan bahwa model yang diimplementasikan dapat menyelesaikan permasalahan ini. Biaya transportasi yang dihasilkan dari model ini tergantung kepada banyaknya pembelian dari sumber ekternal dan besar diskon yang didapatkan. Semakin kecil selisih antara kendaraan yang dipakai dan kendaraan yang dipesan pada setiap perjalanan, maka semakin optimum biaya transportasi yang dihasilkan.

Kata kunci : Masalah Transportasi, Optimisasi Robust, Pemrograman Linear, Adjustable Robust Counterpart

PENDAHULUAN

Transportasi merupakan salah satu komponen utama dalam perencanaan aktivitas industri. Sehingga dalam prakteknya menurut (Taha [1]), masalah transportasi adalah masalah tentang distribusi barang diantara sumber (*resource)* ke tempat persediaan *(supply)* menuju titik tujuan *(destination).*

Dalam paper ini dibahas pengembangan masalah transportasi. Masalah transportasi pada penelitian ini memiliki banyak komponen yang dilibatkan tidak hanya rute perjalanan dan biaya transportasi, antara lain; jumlah kendaraan yang dipinjam, jumlah potongan harga (diskon) yang didapatkan pada setiap pemesanan kendaraan dan pembelian barang dari sumber eksternal yang diakibatkan oleh permintaan yang tidak tetap.

Oleh karena itu, untuk mengatasi masalah ini digunakan Model Transportasi yang dimodifikasi menjadi lebih kompleks yang memperhitungkan ketidakpastian, baik ketidakpastian pada faktor diskon maupun ketidakpastian pada permintaan yang mengakibatkan terjadinya pembelian pada sumber eksternal. Salah satu bidang Optimisasi yang mampu menyelesaikan permasalahan yang terkait dengan masalah ketidakpastian adalah Optimisasi *Robust*. Merukuk dari buku (Ben-Tal [2]) menyatakan bahwa Optimisasi *Robust* merupakan satu bidang dari optimisasi untuk menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan ketidakpastian. Hal ini menyikapi ketidakpastian yang terdapat pada parameter dalam masalah optimisasi deterministik.

Tidak seperti metode Pemrograman Stokastik, Optimisasi *Robust* tidak menanggap bahwa ketidakpastian parameter adalah suatu variabel acak dengan distribusi yang diketahui, ini mewakili ketidakpastian dalam parameter.

Pada umumnya, penulisan data untuk model ketidakpastian tersebut dengan mengasumsikan bahwa setiap jumlah kendaraan yang dipakai pada setiap perjalanan memiliki sebuah interval. Dalam kasus ini, pendekatan *Box Uncertainty* digunakan. Oleh sebab itu, digunakan *Adjustable Robust Counterpart* dengan pendekatan *Box Uncertainty* untuk menyelesaikan masalah optimisasi dengan faktor diskon dan pembelian barang dari sumber eksternal sehingga didapatkan solusi yang optimal.

Mengutip (Jiacheng [3]) dalam jurnal yang berjudul *The Robust Model of Continous Transportation Network Design Problem*. Optimisasi *Robust* digunakan karena dapat menyelesaikan suatu permasalahan dengan data yang tidak tentu. Berbeda dengan pendekatan tradisional yang banyak digunakan, pendekatan dengan *robust* mencoba mengoptimasi kasus terburuk dan bisa membantu untuk mendapat hasil yang bersifat konservatif tapi bukan yang paling optimal. Meskipun seperti demikian dengan metode *robust* dapat menghasilkan solusi yang memungkinkan dengan parameter yang berhubungan dengan permintaan tidak tetap yang sebagian terganggu.

Dalam penelitian ini, penulis menyajikan model optimisasi *Adjustable Robust Counterpart* pada permasalahan transportasi yang melibatkan faktor diskon dan pembelian dari sumber eksternal.

METODE PENELITIAN

Optimisasi Robust

Metode yang digunakan untuk memperhitungkan ketidakpastian dalam penelitian ini adalah Optimisasi *Robust* (Ben-Tal [2], Hertog [4]). Pada Optimisasi *Robust,* sebuah masalah Pemrograman Linear (PL) dengan ketidakpastian didefinisikan sebagai berikut (*Uncertain Linear Programming*).

$$\min\{c^T x : Ax = b \ , x \geq 0 \ \forall c, A, b \in U\} \tag{1}$$

dimana $c \in R^n$ adalah koefisien fungsi objektif, $A \in R^{m \times n}$ adalah matriks fungsi kendala $b \in R^m$ adalah vektor ruas kanan, dan $x \in R^n$ adalah vektor variabel keputusan yang harus ditentukan. Perhatikan bahwa dalam masalah optimisasi tertentu parameter (c, A, b) berada pada himpunan taktentu U .

Dengan demikian, dalam lingkungan pengambilan keputusan, solusi yang berarti untuk masalah ketidakpastian *(uncertain)* adalah solusi *Robust feasible.* Hal ini mengingatkan bagaimana memutuskan untuk mendapatkan nilai objektif (yang dapat berupa ketidakpastian), sebagai suatu solusi. Seperti halnya yang diterapkan pada objektif, orientasi kemungkinan terburuk pada solusi *Robust feasible x* dengan dijamin oleh nilai asli fungsi tujuan, yaitu dengan nilai terbesar dari $sup\{c^T x: (c, A, b) \in U\}$.

Oleh karena itu kemungkinan terbaik dari solusi *robust feasible* adalah salah satu yang dapat memecahkan masalah optimisasi berikut:

$$\min \quad \{c^T x : Ax = b \ ; x \geq 0 \ ; c, A, b \in U\} \tag{2}$$

karena unsur ketidakpastian ada pada fungsi tujuan maka fungsi tujuan harus dibatasi oleh suatu nilai misalkan ω . Sehingga persamaan (2) dapat ditulis kembali sebagai berikut:

$$\min \quad \left\{\omega : \omega \geq c^T x, \ Ax = b; x \geq 0; c, A, b \in U\right\} \tag{3}$$

Nilai ω menjadi batas atas yang membatasi fungsi tujuan, hal ini hanya dapat terjadi karena tujuan dari masalah tersebut adalah meminimumkan fungsi tujuan. Masalah disebut *robust counterpart* dan solusi yang didapat dinamakan *robust feasible/ robust optimal solution.*

Box-Uncertainty dan Ellipsoidal Uncertainty

Dari pembahasan sebelumnya dapat dilihat akibat dari ketidakpastian pada setiap kendala. Pada risiko terdapat beberapa kendala, indeks kendala-*i* sementara dijatuhkan dan mempertimbangkan bentuk kanonik pada kendala *Robust semi-infinite*.

$$a^t x - b \leq 0, \ \forall (a, b) \in U \tag{4}$$

dimana, a merupakan vektor di R^n dan b adalah skalar yang merupakan perwakilan umum dari a_i dan b_i. Hal yang sama berlaku pada U berdiri untuk U_i . Pada hal ini, mudah untuk mendeskripsikan parameter tidak pasti a dan b dan himpunan tidak pasti U dalam hal mengatur faktor primitif $\zeta \in R^L$. Dapat ditulis sebagai berikut;

$$a = \overline{a} + P\zeta$$

$$b = \overline{b} + p^T\zeta$$

Dimana $\overline{a} \in R^n, P \in R^{n\times L}, b_0 \in R$ dan $p \in R^L$ dan

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} a = \overline{a} + P\zeta \\ b = \overline{b} + p^T\zeta \end{pmatrix} \middle| \zeta \in Z \right\} \tag{5}$$

Dimana $Z \subset R^L$ merupakan himpunan ketidakpastian untuk faktor primitif. Vektor tetap $\overline{a}$ dan skalar $\overline{b}$ akan disebut nominal. Mengingat persamaan (5), dapat diberikan rumusan yang lain untuk persamaan (4). Mengganti a dan b dengan pernyataan mereka di ζ, terdapat persamaan;

$$\left(\overline{a}^T x - \overline{b}^T\right) + \left(P^T x - p\right)^T \zeta \le 0, \quad \forall \zeta \in Z \tag{6}$$

Penggambaran dari suatu ketidakpastian dengan cara faktor primitif ini tidak berarti diperlukan. Hal ini hanya memudahkan. Dimisalkan pada dua masalah sederhana bagaimana faktor primitif dapat diperkenalkan ketika informasi awal yang diberikan pada parameter a dan b.

Perhatikan kasus pertama dimana ketidakpastian pada a dan b dijelaskan oleh interval sederhana, yaitu $\mathscr{U} = \left\{(a,b) \mid a^l \le a \le a^u \text{ dan } b^l \le b \le b^u\right\}$. Jika didefinisikan;

$$\overline{a} = \frac{a^l + a^u}{2}, P = \text{diag}\left(\frac{a^u - a^l}{2}\right), \overline{b} = \frac{b^l + b^u}{2}, p = \frac{b^u - b^l}{2}$$

dan $Z = \left\{\zeta \middle| -1 \le \zeta_l \le 1, l = 1, \ldots, L\right\}$,

Kasus sederhana lainnya sesuai dengan situasi dimana parameter a dan b dibatasi untuk sebuah himpunan *Ellipsoidal* disekitar nilai beberapa referensi. Untuk memudahkna notasi, diasumsikan tanpa kehilangan sifat keumuman jika b merupakan deterministik. Himpunan ketidakpastian pada parameter a adalah sebagai berikut:

$$U = \left\{a \middle| \left(a - \overline{a}\right)^T Q \left(a - \overline{a}\right) \le \rho^2\right\} \tag{7}$$

Diasumsikan Q adalah *Symetric Positive Definite.* U adalah sebuah himpunan convex terbatas. Didefinisikan $\zeta = Q^{\frac{1}{2}}\left(a - \overline{a}\right)$ dan $P = Q^{\frac{1}{2}}$, maka dapat digambarkan pada persamaan berikut;

$$U = \left\{a = \overline{a} + P\zeta \mid \zeta \in Z\right\},$$

dengan $Z = \left\{\zeta \mid \|\zeta\|_2 \le \rho\right\}$. Formulasi yang lain dapat diperoleh dengan mengambil $\zeta = a - \overline{a}$. lalu, akan didapatkan;

$$U = \left\{a = \overline{a} + \zeta \mid \|\zeta\|_Q \le \rho\right\},$$

dimana $\|\zeta\|_Q$ berdiri untuk $\sqrt{\zeta^T Q \zeta}$

Adjustable Robust Counterpart

Dengan mempertimbangakan persamaan *Adjustable Robust Counterpart* dari masalah *multi-stage* maka didapatkan persamaan:

$$(ARC) \quad \left(\overline{a} + P\zeta\right)^T x + d^T y \ge b, \forall \zeta \in Z,$$

Dimana $x \in \mathbb{R}^{n_1}$ merupakan variabel *non-adjustable*, dan $y \in \mathbb{R}^{n_2}$ merupakan variabel *adjustable.* Situasi seperti ini disebut *fixed recourse situation*, mengingat persamaan untuk variabel *adjustable* y merupakan variabel tetap. Dimisalkan suatu variabel optimisasi $y = y(\zeta)$ merupakan aturan terhadap suatu keputusan yang disebut fungsi vektor. Maka akan dihasilkan keputusam linier pada:

$$y = u + V\zeta, \tag{8}$$

Dimana koefisien $u \in \mathbb{R}^{n_2}$ dan $V \in \mathbb{R}^{n_2 \times L}$ akan ditentukan; yang nantinya koefisien tersebut akan menjadi variabel optimisasi pada *(ARC)*. Lalu, keputusan linear yang ada pada *(ARC)* akan disubtitusikan untuk mendapatkan *Affinely Adjustable Robust Counterpart:*

$$(AARC) \quad \left(\bar{a} + P\zeta\right)^T x + d^T (u + V\zeta) \le b, \forall \zeta \in Z$$

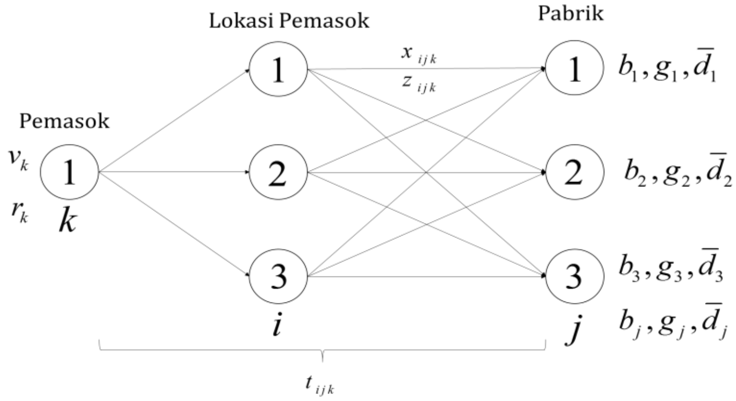
Atau sama dengan;

$$(AARC) \quad a^{-T} x + d^T u + (P^T x + V^T d)^T \zeta \le b, \forall \zeta \in Z. \tag{9}$$

HASIL DAN PEMBAHASAN

Model Masalah Transportasi dengan Faktor Diskon dan Pembelian dari Sumber Eksternal

Merujuk pada (Manggioni [5]), masalah yang digunakan pada penelitian ini berasal dari masalah transportasi standar yang diperbaharui berdasarkan faktor eksternal yang mempengaruhi sistem transportasi pada dunia industri seperti kapasitas kendaraan pengangkut, jumlah berang yang disimpan di gudang *(inventory)*, banyaknya permintaan konsumen dan rata-rata pembelian di sumber eksternal. Dengan mengabaikan ketidakpastian pada permintaan konsumen dan hanya memperhatikan model deterministik, maka dinotasikan sebagai berikut:



Gambar 1. Diagram transportasi dengan faktor diskon dan pembelian dari Sumber Eksternal

$\mathcal{K} = \{k: k = 1, \dots, K\}$, Himpunan pemasok;
$\mathcal{O}_k = \{i: i = 1, \dots, \mathcal{O}_k\}$, Himpunan lokasi pemasok pabrik $k \in \mathcal{K}$;
$\mathcal{D} = \{j: j = 1, \dots, \mathcal{D}\}$, Himpunan pabrik tujuan $i \in \mathcal{O}_k, k \in \mathcal{K}$;

Parameter:
t_{ijk} , Biaya transportasi unit dari pemasok ke pemasok $j \in \mathcal{D}$;
$\bar{b}_j$, Biaya pembelian rata-rata dari sumber external di pemasok pada setiap pelanggan $j \in \mathcal{D}$;
q , Kapasitas kendaraan;
g_j , Kapasitas muatan pada pelanggan $j \in \mathcal{D}$;
v_k , Kapasitas persyaratan maksimum pemasok $k \in \mathcal{K}$;
r_k , Kapasitas persyaratan minimum pemasok $k \in \mathcal{K}$;
l_j^0 , Persediaan produk awal pelanggan $j \in \mathcal{D}$;
α , Potongan harga;
$\bar{d}_j$, Rata-rata permintaan dari pelanggan $j \in \mathcal{D}$

Variabel:
$x_{ijk} \in \mathbb{N}$, Jumlah kendaraan yang dipesan dari pemasok $i \in \mathcal{O}_k, k \in \mathcal{K}$ ke pemasok $j \in \mathcal{D}$;
$z_{ijk} \in \mathbb{N}$, Jumlah kendaraan yang benar-benar digunakan dari pemasok $i \in \mathcal{O}_k, k \in \mathcal{K}$ ke pemasok $j \in \mathcal{D}$;

ISBN: 978-602-61045-0-2

$y_j \in \mathbb{R}^+$, Banyaknya produk (dinormalisasi dengan q), untuk membeli sumber eksternal untuk pemasok $j \in \mathcal{D}$;

Telah dinotasikan bahwa $\mathbb{N}$ merupakan set dari semua integer yang nonnegative, dan $\mathbb{R}^+$ merupakan set dari semua bilangan riil yang nonnegative. Diasumsika jika jumlah permintaan konsumen dan biaya pembelian barang dari sumber lain telah diketahui, maka akan didapatkan model sebagai berikut;

$$\min_{(x_{ijk}),(z_{ijk}),(y_j)} q\sum_{k=1}^{K}\sum_{i=1}^{O_k}\sum_{j=1}^{D} t_{ijk}x_{ijk} + \left\lfloor \sum_{j=1}^{D} qb_j y_j - \alpha q\sum_{k=1}^{K}\sum_{i=1}^{O_k}\sum_{j=1}^{D} t_{ijk}(x_{ijk} - z_{ijk}) \right\rfloor \quad (10)$$

$$s.t. \qquad q\sum_{i=1}^{O_k}\sum_{k=1}^{K} x_{ijk} \le g_j,\ j \in D \quad (11)$$

$$l_j^0 + q\left(\sum_{i=1}^{O_k}\sum_{k=1}^{K} z_{ijk} + y_j\right) \ge \bar{d}_j + \rho_1 G_j,\ j \in D \quad (12)$$

$$z_{ijk} \le x_{ijk},\ i \in O_k, k \in K, j \in D \quad (13)$$

$$r_k \le q\sum_{i=1}^{O_k}\sum_{j=1}^{D} z_{ijk} \le v_k, k \in K \quad (14)$$

$$x_{ijk} \in \mathbb{N}, i \in O_k, k \in K, j \in D \quad (15)$$

$$y_j \in \mathbb{R}^+, j \in D \quad (16)$$

$$z_{ijk} \in \mathbb{N}, i \in O_k, k \in K, j \in D \quad (17)$$

Penjumlahan pertama pada fungsi tujuan (10) dinotasikan sebagai biaya pemesanan kendaraan yang diperkirakan ketika penjumlahan yang kedua mewakili tindakan lain yang terdiri dari pembelian barang dari sumber eksternal (qy_j). Kendala (11) menjamin bahwa total kuantitas yang sampai dari pemasok ke pelanggan j tidak lebih besar dari kapasitas muatan g_j milik pelanggan-j, dengan menginduksi dari batas atas pada total jumlah kendaraan. Kendala (12) memastikan bahwa permintaan dari pelanggan-j terpenuhi. Kendala (13) menjamin bahwa jumlah kendaraan yang sebenarnya digunakan sama atau lebih besar dengan jumlah pemesanan di awal. Kendala (14) memastikan bahwa jumlah kendaraan yang melayani pemasok-k melebihi kapastias produksi v_k dari pemasok $k \in \mathcal{K}$ dan memenuhi permintaan kapasitas terendah r_k yang telah ditetapkan pada kontrak. Persamaan (15)-(17) mendefinisikan variabel keputusan dari masalah.

***Robust Counterpart Transportation Problem* (RCTP)**

Model Optimisasi Robust untuk masalah transportasi dengan diskon dan pembelian barang dari sumber eksternal adalah sebagai berikut;

$$\min_{(\omega),(x_{ijk}),(z_{ijk}),(y_j)} \omega \quad (18)$$

$$s.t \qquad \omega \ge q\sum_{k=1}^{K}\sum_{i=1}^{O_k}\sum_{j=1}^{D} t_{ijk}x_{ijk} + \left\lfloor \sum_{j=1}^{D} qb_j y_j - \alpha q\sum_{k=1}^{K}\sum_{i=1}^{O_k}\sum_{j=1}^{D} t_{ijk}(x_{ijk} - z_{ijk}) \right\rfloor, \forall b \in U_b \quad (19)$$

$$q\sum_{i=1}^{O_k}\sum_{k=1}^{K} x_{ijk} \le g_j,\ j \in D \quad (20)$$

$$l_j^0 + q\left(\sum_{i=1}^{O_k}\sum_{k=1}^{K} z_{ijk} + y_j\right) \ge \bar{d}_j + \rho_1 G_j,\ j \in D \quad (21)$$

$$z_{ijk} \le x_{ijk},\ i \in O_k, k \in K, j \in D \quad (22)$$

$$r_k \le q\sum_{i=1}^{O_k}\sum_{j=1}^{D} z_{ijk} \le v_k, k \in K \quad (23)$$

$$x_{ijk} \in \mathbb{N}, i \in O_k, k \in K, j \in D \quad (24)$$

$$y_j \in \mathbb{R}^+, j \in D \tag{25}$$

$$z_{ijk} \in \mathbb{N}, i \in O_k, k \in K, j \in D \tag{26}$$

dimana telah disertakan ω sebagai variabel pembantu untuk masalah RCTP.

Robust Counterpart Transportation Problem* (RCTP) dengan pendekatan *Box-Uncertainty

Terdapat $\max\limits_{d \in U_{d,box}} \bar{d}_j + \rho_1 G_j$ dan $U_{b,box,L} = \left\{ b \in \mathbb{R}^D : \left| b_j - \bar{b}_j \right| \le \rho_2 F_j, j \in D \right\}$ dengan menggunakan persamaan tidak tetap untuk ketidakpastian pada vektor b dan d , formulasi *robust* dari masalah yang dimiliki sebelumnya pada persamaan (18) dapat disederhanakan menjadi suatu bentuk persamaan linier *mixed integer problem:*

$$\min_{(w),(x_{ijk}),(z_{ijk})} \omega \tag{27}$$

$$s.t \quad \omega \ge q \sum_{k=1}^{K} \sum_{i=1}^{O_k} \sum_{j=1}^{D} t_{ijk} x_{ijk} + \left\lfloor \sum_{j=1}^{D} q \bar{b}_j y_j + q \rho_2 F_j W_j - \alpha q \sum_{k=1}^{K} \sum_{i=1}^{O_k} \sum_{j=1}^{D} t_{ijk} (x_{ijk} - z_{ijk}) \right\rfloor \tag{28}$$

Karena dalam masalah ini terdapat variabel b dan d yang diganggu, terdapat ketidakpastian pada biaya pembelian barang dari sumber eksternal $\left(b_j\right)$ sehingga pada fungsi kendala (30) ditambahkan variabel u_j sebagai himpunan *box uncertainty* dengan $u_j = \rho_2 F_j W_j, \quad j = 1, \ldots, D$

$$q \sum_{i=1}^{O_k} \sum_{k=1}^{K} x_{ijk} \le g_j, j \in D \tag{29}$$

Sementara itu, pada kendala selanjutnya (30) terdapat ketidakpastian pada permintaan konsumen (*demand*) sehingga variabel d_j perlu diganggu, dengan menggunakan *simple box uncertainty* (28) terdapat $\max\limits_{d \in \mathscr{U}_{d,box}} d_j = \bar{d}_j + \rho_1 G_j$ yang berbeda dengan persamaan (21), pada persamaan ini, set ketidakpastian d_j disubtitusikan menjadi sebagai berikut;

$$l_j^0 + q \left(\sum_{i=1}^{O_k} \sum_{k=1}^{K} z_{ijk} + y_j \right) \ge \bar{d}_j + \rho_1 G_j, j \in D \tag{30}$$

Sehingga Model Optimisasi Robust dengan pendekatan *box-uncertainty* untuk masalah transportasi dengan diskon dan pembelian barang dari sumber eksternal adalah sebagai berikut;

$$\min_{(w),(x_{ijk}),(y_j),(z_{ijk})} \omega \tag{31}$$

$$s.t \qquad \omega - \left\{ q \sum_{k=1}^{K} \sum_{i=1}^{O_k} \sum_{j=1}^{D} t_{ijk} x_{ijk} + \left\lfloor \sum_{j=1}^{D} q b_j y_j - \alpha q \sum_{k=1}^{K} \sum_{i=1}^{O_k} \sum_{j=1}^{D} t_{ijk} (x_{ijk} - z_{ijk}) \right\rfloor \right\} \ge \sum_{j=1}^{D} q p_2 F_j y_j \tag{32}$$

$$q \sum_{i=1}^{O_k} \sum_{k=1}^{K} x_{ijk} \le g_j, j \in D \tag{33}$$

$$l_j^0 + q \left(\sum_{i=1}^{O_k} \sum_{k=1}^{K} z_{ijk} + y_j \right) \ge \bar{d}_j + \rho_1 G_j, j \in D \tag{34}$$

$$z_{ijk} \le x_{ijk}, k \in K, i \in O_k, j \in D \tag{35}$$

$$r_k \le q \sum_{i=1}^{O_k} \sum_{j=1}^{D} z_{ijk} \le v_k, k \in K \tag{36}$$

$$x_{ijk} \in \mathbb{N}, k \in K, \mathrm{i} \in O_k, j \in D \tag{37}$$

$$y_j \in \mathbb{R}^+, j \in D \tag{38}$$

$$z_{ijk} \in \mathbb{N}, i \in O_k, j \in D, k \in K \tag{39}$$

Adjustable Robust Counterpart Transportation Problem **(ARCTP)**

Pada masalah transportasi ini, semua variabel diperlakukan dengan cara yang sama. Disini, terdapat tiga variabel keputusan, yaitu variabel x_{ijk} sebagai variabel dengan keputusan *here and now*. Sedangkan, data yang tidak pasti terdapat pada variabel y_j, z_{ijk} variabel yang harus dapat menyesuaikan terhadap beberapa aturan keputusan $Y_j(\cdot)$ dan $Z_{ijk}(\cdot)$. Maka variabel keputusan x_{ijk} disebut variabel *nonadjustable* sementara itu variabel keputusan y_j dan z_{ijk} adalah variabel *adjustable*. Pada penelitian ini diasumsikan jika aturan keputusan $Y_j(\cdot)$ dan $Z_{ijk}(\cdot)$ adalah fungsi *affine* pada setiap argumen yang berlaku.

Dalam mengembangkan model optimisasi *Adjustable Robust*, digunakan model optimisasi sederhana, dimana diasumsikan bahwa koefisien dari variabel *Adjustable* adalah tentu. Tetapi di dalam masalah ini, koefisien b_j yang merupakan parameter dari variabel adjustable y_j bersifat tak tentu.

Asumsikan vektor bilangan b adalah vektor *uncertainty*. Dimana terdapat vektor $b^1, \dots, b^L$ yang menjelaskan gangguan yang mungkin dari vektor rata rata biaya $\bar{b}$. Sehingga timbul asumsi jika $b \in U_{b,box,L}$ lalu komponen biaya b bisa dikatakan sebagai berikut

$$b_j = \bar{b}_j + \zeta\, \rho_2 F_2, |\zeta_j| \leq 1, j = 1, \dots, D \tag{40}$$

Hal ini memperlihatkan jika pemilihan $L = D$ pada satuan dimensi yang digunakan pada persamaan ini mengakibatkan

$$U_{b,box} = \left\{ b \in \mathbb{R}^D : \left| b_j - \bar{b}_j \right| \leq \rho_2 F_j, j \in D \right\} \tag{41}$$

Sehingga di dapatkan persamaan yang berbeda dengan adanya gangguan pada biaya b sebagai berikut:

$$b_j = \bar{b}_j + \rho_2 F_j, j \in D \tag{42}$$

Hal yang sama juga terjadi pada vektor permintaan d, diasumsikan vektor permintaan menjadi set uncertainty $U_{d,box,L}$ yang telah direduksi menjadi simple box dengan formulasi sebagai berikut

$$U_{d,box} = \left\{ d \in \mathbb{R}^D : \left| d_j - \bar{d}_j \right| \leq \rho_1 G_j, j \in D \right\} \tag{43}$$

Dari persamaan dapat diperoleh

$$\max_{d \in U_{d,box}} d_j = \bar{d}_j + \rho_1 G_j \tag{44}$$

Sebelumnya telah disebutkan jika data yang tidak pasti terdapat pada variabel y_j, z_{ijk} variabel yang harus dapat menyesuaikan terhadap beberapa aturan keputusan $Y_j(\cdot)$ dan $Z_{ijk}(\cdot)$. Oleh karena itu variabel $Y_j(\cdot)$ dan $Z_{ijk}(\cdot)$ merupakan variabel pembatas untuk memberikan kelas pada setiap fungsi. Dimisalkan variabel $Y_j(\cdot) = y$ dan $z_{ijk}(\cdot) = z$.

Maka aturan keputusan linear yang berisifat linear pada ζ adalah sebagai berikut:

$$y = e + V\zeta \tag{45}$$

Dan

$$z = f + V\zeta \tag{46}$$

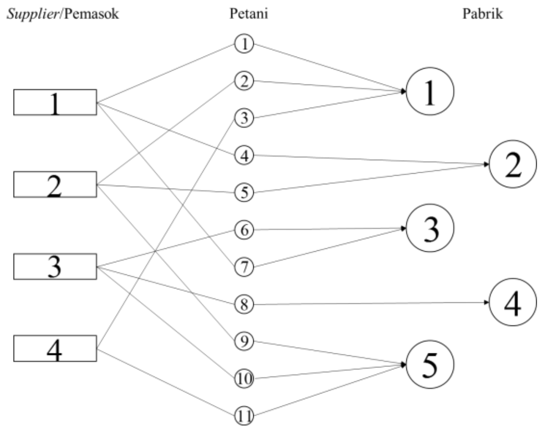
Dimana koefisien $e, f \in \mathbb{R}^{n_2}$ dan $V \in \mathbb{R}^{n_2 \times L}$; pada kenyataannya variabel tersebut akan menjadi variabel optimisasi pada *Adjustable Robust Counterpart (ARC).* Dan keputusan linear yang sudah ditentukan akan disubtitusikan untuk mendapatkan *Affinely Adjustable Robust Counterpart* sebagai berikut :

$$
\begin{aligned}
&\min_{(\omega),(x_{ijk}),(y_j),(z_{ijk})} \quad \omega \\
&s.t \quad \omega - \left\{ q\sum_{k=1}^{K}\sum_{i=1}^{O_k}\sum_{j=1}^{D} t_{ijk}x_{ijk} + \left[\sum_{j=1}^{D} q\bar{b}_j(e+V\zeta) + qp_2F_j(e+V\zeta) - \alpha q\sum_{k=1}^{K}\sum_{i=1}^{O_k}\sum_{j=1}^{D} t_{ijik}\left(x_{ijk} - \left(f+V\zeta\right)\right) \right] \right\} \geq 0 \\
&q\sum_{k=1}^{K}\sum_{i=1}^{O_k} x_{ijk} \leq g_j,\ j \in D \\
&l_j^0 + q\left((f+V\zeta) + (e+V\zeta)\right) \geq \bar{d}_j + \rho_1 G_j,\ j \in D \\
&(f+V\zeta) \leq x_{ijk},\ i \in O_k, k \in K, j \in D \\
&r_k \leq q(f+V\zeta) \leq v_k,\ k \in K \\
&x_{ijk} \in \mathbb{N}, i \in O_k, k \in K, j \in D \\
&y_j \in \mathbb{R}^+,\ j \in D \\
&z_{ijk} \in \mathbb{N}, i \in O_k, k \in K, j \in D \\
&e, f \in \mathbb{R}^{n_2} \\
&V \in \mathbb{R}^{n_2 \times L} \\
&\zeta \in Z
\end{aligned}
\tag{47}
$$

HASIL EKSPERIMEN NUMERIK

Eksperimen Numerik pada Masalah Transportasi pada Pendistribusian Tebu dengan Faktor Diskon dan pembelian Dari Sumber Eksternal

Data untuk simulasi numerik pada kasus ini didapatkan dari (Mangioni [5]) berupa data masalah transportasi pada 4 kelompok pemasok yang berasal dari 11 lokasi yang berbeda menuju 5 pelanggan (pabrik). Lalu diimplementasikan pada sistem pendistribusian tebu menuju pabrik gula (Suprianti [6]) yang digambarkan pada skema distribusi sebagai berikut:



Gambar 2. Skema distribusi tebu menuju pabrik gula

1. Model Pemrograman Linear

Bedasarkan persamaan (10)-(17) yang telah disubtitusi data dari Mangioni [5] diperoleh sebagai berikut:

i. Nilai fungsi objektif = 1,393,906.87625855 artinya biaya minimum untuk pendistribusian Tebu pada kasus 1 sebesar 1, 393, 906 USD pada satu periode transportasi.
ii. Berikut merrupakan variabel keputsan yang harus diambil dari masalah transportasi dengan diskon dan pembelian dari sumber eksternal menggunakan pemrograman linear

Tabel 1. Nilai variabel objektif dari solusi optimal. Jumlah kendaraan yang disewa, kendaraan yang di pakai dan pembelian dari sumber eksternal.

x_{111}	**12**	z_{111}	**12**	y_1	**0**
x_{212}	1	z_{212}	1	y_2	0
x_{314}	1	z_{314}	1	y_3	0
x_{421}	11	z_{421}	11	y_4	0
x_{522}	1	z_{522}	1	y_5	5
x_{623}	1	z_{623}	1		
x_{721}	12	z_{721}	12		
x_{843}	1	z_{843}	1		
x_{925}	1	z_{925}	1		
x_{1053}	1	z_{1053}	1		
x_{1154}	1	z_{1154}	1		

2. Model Optimisasi *Robust* (RCTP)

Bedasarkan persamaan yang telah disubtitusikan persamaan (31)-(39) dengan data dari jurnal Manggioni [5] diperoleh:

i. Nilai Fungsi Objektif = ω = 1,473,646 artinya biaya minimum untuk pendistribusian Tebu pada kasus 1 sebesar 1, 473, 646 USD pada satu periode transportasi.
ii. Berikut merrupakan variabel keputsan yang harus diambil dari masalah transportasi dengan diskon dan pembelian dari sumber eksternal menggunakan Optimisi Robust dengan pendekatan *box uncertainty*

Tabel 2. Nilai variabel objektif dari solusi optimal. Jumlah kendaraan yang disewa, kendaraan yang dipakai dan pembelian dari sumber eksternal.

x_{111}	**12**	z_{111}	**12**	y_1	**0**
x_{212}	1	z_{212}	1	y_2	0
x_{314}	1	z_{314}	1	y_3	0
x_{421}	11	z_{421}	11	y_4	0
x_{522}	1	z_{522}	1	y_5	5
x_{623}	1	z_{623}	1		
x_{721}	12	z_{721}	12		
x_{843}	1	z_{843}	1		
x_{925}	1	z_{925}	1		
x_{1053}	1	z_{1053}	1		
x_{1154}	1	z_{1154}	1		

KESIMPULAN

Model *Robust Counterpart Transportation Problem* (RCTP) merupakan pemrograman bilangan bulat campuran sehingga dapat dijamin bahwa RCTP dengan pendekatan *box uncertainty* merupakan formulasi yang dapat diselesaikan secara komputasi. Oleh karena itu, penerapan optimisasi robust pada masalah transportasi dengan ketidaktentuan menghasilkan solusi optimum global.

UCAPAN TERIMA KASIH

Penulis mengucapkan terima kasih kepada berbagai pihak yang telah membantu dalam penulisan makalah ini. Penelitian ini sebagian didanai oleh Hibah Kompetensi DIKTI 2016.

REFERENSI

1. H. A. Taha, Operation Research: An Introduction Eight Edition, Upper Saddle River, New Jersey: Pearson Education, Inc, 2007.
2. D. Bertsimas, D. B. Brown and C. Caramanis, *Theory an aplication of Robust Optimization*, 2007.
3. S. Hua, G. Ziyou and L. Jiancheng, *The Robust Model of ContinousTransportation Network Design Problem*, Journal of Transportation Systems Engineering and Information Technology, p. 2, 2011.
4. A. Ben-Tal, L. El-Ghaoui and A. Nemirovski, *Robust Optimization*, Priceton University Press ISBN 978-0-691-14368, 2009.
5. D. d. Hertog, *Practical Robust Optimization*, Tilburg University, The Netherlands, 2015.
6. F. Manggioni, F. A. Potra and M. B. , *Stochastic versus Robust Optimization for a Transportation Problem*, 2014.
7. T. R. L. Christesen and M. Labbe, *A branch-cut-and-price Algorithm for The Pricewise Linear Transportation Problem*, Eropean Journal of Operation Research, 2015.