Model Optimisasi Robust dengan Himpunan Tak Tentu Polihedral

Diah Chaerani, Syafi Muhammad Tauhid, Endang Rusyaman, Eman Lesmana

Departemen Matematika FMIPA Universitas Padjadjaran
Jalan Raya Bandung Sumedang KM 21 Jatinangor Sumedang

email: d.chaerani@unpad.ac.id, syafi120407@gmail.com, rusyaman@unpad.ac.id, eman.lesmana@unpad.ac.id

Abstrak

Dalam makalah ini dibahas bagaimana pemodelan untuk masalah optimisasi taktentu dengan menggunakan asumsi bahwa data taktentu yang terlibat diasumsikan merupakan himpunan taktentu polihedral. Kajian masalah ini dapat dipandang sebagai salah satu cara untuk menentukan tingkat robustness dari masalah optimisasi taktentu, dimana diharapkan formulasi robust counterpart dapat dinyatakan dalam salah satu kelas masalah optimisasi yang computationally tractable. Untuk mencapai kondisi computationally tractable tersebut, berbeda dengan asumsi himpunan taktentu dengan box dan ellipsoidal uncertainty, dalam polihendra uncertainty penyelesaian harus ditempuh melalui teori dualitas dalam optimisai konveks. Disajikan pula contoh masalah dan penyelesaiannya.

Kata-kata kunci: Optimisasi Robust, Himpunan Tak Tentu, Polihedral, Robust Counterpart Methodology

PENDAHULUAN

Optimisasi Robust merupakan satu bidang dari optimisasi untuk menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan ketidakpastian, kelas masalah optimisasi ini pertama kali diperkenalkan oleh Mulvey *et al.* [1] pembahasan survey komprehensif dalam bidang Optimisasi Robust dibahas oleh Gabrel *et al.* [2].

Metodologi *robust counterpart* (RC) yang diusulkan oleh BenTal dan Nemirovskii seperti yang dibahas dalam [3, 4, 5], merupakan salah satu metodologi yang dikenal untuk menangani ketidaktentuan data dalam suatu masalah optimisasi. Dalam metodologi ini, ketika data taktentu dilibatkan dalam model yang dibahas, maka formulasi masalah optimisasi yang harus diselesaikan merupakan masalah optimisasi yang semi-infinite, yaitu masalah optimisasi dengan sejumlah variabel hingga dengan fungsi kendala yang tak-hingga banyaknya (lihat Goerigk dan Schöbel [6]).

Merujuk pada Ben-Tal dan Nemirovski [4] dan [5], disebutkan bahwa tantangan utama dalam metodologi RC adalah untuk menjawab pertanyaan bagaimana dan kapan suatu formulasi RC dari masalah optimisasi taktentu dapat dinyatakan sebagai suatu masalah optimisasi yang *computionally tractable* atau paling tidak model RC yang diperoleh dapat didekati sebagai suatu masalah yang *tractable.* Hal ini sangat bergantung pada bagaimana himpunan taktentu yang dipilih untuk merepresentasikan ketidaktentuan data. Untuk memenuhi hal ini, tantangan tersebut diatas hanya dapat dipenuhi, bila himpunan data taktentu tersebut dapat dipilih dalam suatu cara yang tepat. Kelas masalah yang *computationally tractable* ini dapat diselesaikan dalam waktu yang polinom serta terjamin eksistensi solusi optimal global karena dapat direpresentasikan dalam salah satu dari tiga kelas masalah optimisasi konveks, yaitu masalah optimisasi linear, optimisasi *conic quadratic* atau semidefinite optimisasi. Merujuk pada BenTal, *et al.*, [5], pencapaian formulasi yang robust tersebut dapat dilakukan ketika himpunan data taktentu diasumsikan berada dalam tiga himpunan yang dianyatakan sebagai himpunan tak tentu yang berupa box, ellipsoidal atau polihedral (lihat BenTal, *et al.*, [5], Gorissen, *et al.* [9], Hertog, *et al.* [10]).

Dalam makalah ini dibahas mengenai penyelesaian masalah optimisasi robust dengan menggunakan himpunan taktentu polihedral beserta contoh kasusnya pada penentuan jalur terpendek untuk bus sekolah di kota Bandung.

METODE PENELITIAN

Pada sub bagian ini dibahas secara ringkas metode penelitian yang digunakan dalam makalah ini, antara lain pembahasan mengenai paradigma Optimisasi robust dan cara menyelesaikan *robust counterpart* seperti yang diperkenalkan (lihat BenTal, *et al.*, [5], Chaerani dan Roos [11], Gorissen, *et al.* [9], Hertog, *et al.* [10]). Metode Branch and Bound untuk menyelesaikan masalah optimisasi linear integer dibahas secara singkat merujuk pada Wosley [12].

Definisikan masalah Pemrograman Linear sebagai berikut

$$\min\left\{c^T x : Ax \le d, x \ge 0\right\} \tag{1}$$

dengan parameter c, A dan d diasumsikan bernilai tak tentu, dimana $c, A, d \in U$, dengan U merupakan himpunan semua ketidakpastian data, maka masalah Pemrograman Linear Tak Tentu dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$\min\left\{c^T x : Ax \le d, x \ge 0, \forall\ (c, A, d) \in U\right\} \tag{2}$$

Ben-Tal, *et al*. dalam [5] menyatakan bahwa agar Optimisasi *Robust* menghasilkan solusi *feasible*, maka harus didefinisikan "lingkungan keputusan" yang mempunyai karakteristik sebagai berikut:

(A1) Semua variabel keputusan merepresentasikan keputusan "*here and now*", serta harus didapatkan nilai numerik tertentu sebagai hasil dari penyelesaian masalah sebelum data sebenarnya memperlihatkan nilai sebenarnya.

(A2) Pembuat keputusan bertanggungjawab sepenuhnya atas keputusan yang harus dibuat jika dan hanya jika data sebenarnya telah ditentukan dalam himpunan ketidakpastian U.

(A3) Kendala pada masalah Pemrograman Linear tak tentu adalah kendala "sulit", artinya tidak dapat ditoleransi pelanggaran dari kendala, meskipun sekecil apapun, ketika data berada pada U.

Dengan kondisi A.1, A.2 dan A.3 tersebut di atas, pendekatan optimisasi robust mengkonversi keluarga masalah taktentu (2) menjadi masalah deterministik dengan fungsi variable tunggal berikut, yang disebut sebagai *Robust counterpart.*

$$\rho^* = \min\left\{c^T x : Ax \le d, x \ge 0, \forall\ (c, A, d) \in U\right\} \tag{3}$$

dengan vektor x^* disebut solusi optimal robust jika untuk semua realisasi $\forall(c, A, d) \in U$, x^* merupakan solusi fisibel dan nilai dari fungsi objektif dijamin bernilai paling besar π^*. Menurut Gorissen *et al* [9] dan Hertog, *et al.* [10], masalah (2) tersebut dapat dinyatakan secara ekivalen sebagai masalah dengan fungsi objektif linear tentu dan kendala tak tentu sebagai berikut:

$$\min_{x,t}\left\{t : c^T x - t \le 0, A_i^T x - d_i \le 0, x \ge 0, i = 1,..,m, \forall\ (c, A, d) \in U\right\} \tag{4}$$

Selain asumsi-asumsi dasar tersebut, dapat diasumsikan bahwa fungsi objektif adalah tentu dan kendala pada ruas kanan adalah tentu (Gorissen, *et al*. [9]). Asumsi-asumsi ini tidak membatasi karena hal-hal sebagai berikut:

(B1) Misalkan koefisien-koefisien pada fungsi objektif, c, tak tentu, dan koefisien-koefisien tersebut dihimpun dalam himpunan C:

$$\min_x \max_{c \in C}\left\{c^T x : Ax - d \le 0, \forall\ A \in U\right\} \tag{5}$$

Ketidakpastian fungsi objektif dari masalah optimisasi dapat diformulasi kembali secara ekivalen menjadi fungsi objektif tentu berikut (lihat Ben-Tal, *et al.*,[5]):

$$\min_{x,t}\left\{t : c^T x - t \le 0, Ax - d \le 0, x \ge 0, \forall\ (c, A) \in U\right\} \tag{6}$$

dengan variabel tambahan $t \in R$.

(B2) Jika vektor ruas kanan d taktentu, maka selalu dapat dibentuk menjadi koefisien tentu dengan memperkenalkan variabel tambahan $x_0 = 1$, sehingga diperoleh (Hertog, *et al.* [10]):

$$\min_{x,t}\left\{t : c^T x - t \le 0, A_i^T x - d_i x_0 \le 0, x_0 = 1, i = 1,..,m, \forall\ (A, d) \in U\right\} \tag{7}$$

(B3) *Robustness* atas himpunan tak tentu U dapat diformulasikan dalam bentuk *constraints-wise.* Menurut Hertog [10], pengertian *constraints-wise* dari himpunan taktentu U_i merupakan proyeksi dari himpunan U pada bidang dari

ISBN: 978-602-61045-2-6

komponen taktentu dari kendala ke-i. Merujuk pada BenTal, *et al.* [5] telah dibuktikan bahwa secara umum *robustness* untuk kendala ke-i atas himpunan taktentu U adalah ekivalen dengan *robustness* terhadap U_i.

(B4) Ketidaktentuan U dapat digantikan oleh *convex hull*, $conv(U)$, bukti formal dapat dilihat pada BenTal, *et al.* [5] bahwa menguji fisibilitas himpunan taktentu U ekivalen dengan memaksimumkan fungsi linear atas himpunan taktentu U yang menghasilkan nilai optimal yang sama jika masalah ini diselesaikan untuk memaksimumkan atas *convex hull* U.

Pada bagian selanjutnya dibahas bagaimana cara menyelesaikan *robust counterpart*.

MENYELESAIKAN ROBUST COUNTERPART

Asumsikan $c \in R^n$ dan $d \in R^m$ adalah tentu, maka formulasi *robust* dari (2) yaitu *Robust counterpart* adalah sebagai berikut (Gorissen, *et al*., [9]):

$$\min_x \left\{ c^T x : A(z)x - d \leq 0, " z \in Z \right\} \Leftrightarrow \min_x \left\{ c^T x : A_i^T(z)x - d_i \leq 0, i = 1,..,m, " z \in Z \right\} \quad (8)$$

dimana $Z \subset R^L$ menunjukkan penggunaan himpunan ketidakpastian tertentu. Solusi $x \in R^n$ disebut *robust feasible* jika memenuhi semua kendala tak tentu $[A(\zeta)x \leq d]$ untuk semua realisasi dari $\zeta \in Z$. Didefinisikan parameter ketidakpastian:

$$a(z) = a = \bar{a} + Pz \quad (9)$$

dimana $\bar{a} \in R^n, P \in R^{n \times L}$ dan $\bar{a}$ merupakan nilai nominal. Dapat didefinisikan himpunan U.

$$U = \{a : a = \bar{a} + Pz, z \text{ I } Z\} \quad (10)$$

Sebuah kendala yang diperoleh dari (9) dengan melakukan substitusi parameter ketidakpastian dapat dimodelkan sebagai berikut:

$$(\bar{a} + P\zeta)^T x \leq d, \forall \zeta \in Z \quad (12)$$

Solusi optimal dari *Robust counterpart* disebut solusi *robust* optimal, dan nilai optimal dari *Robust counterpart* disebut nilai *robust* optimal dari masalah Pemrograman Linear Tak Tentu.

Merujuk pada BenTal, *et al.* [5], setelah mendefinisikan *robust counterpart*, maka hal penting yang harus diungkap adalah apakah *robust counterpart* tersebut memiliki status komputasi yang *tractable*. Serta kapan robust counterpat dapat diproses secara efisien. Untuk menjawab pertanyaan tersebut di atas, BenTal, *et al.* [5] telah dibahas bahwa *robust counterpart* dari suatu masalah optimisasi linear taktentu dengan himpunan taktentu U merupakan masalah yang *computationally tractable U convex dari U* juga merupakan masalah yang *computationally tractable*. Hal ini dapat dicapai dengan menempuh strategi berikut. Pertama batasi masalah optimisasi linear taktentu dengan suatu fungsi objektif yang tentu. Kedua, nyatakan *robust counterpart* dalam representasi yang *computationally tractable* dari satu kendala linear taktentu. Hal ini berarti bahwa formulasikan *robust counterpart* sebagai masalah minimisasi dari fungsi objektif linear atas suatu himpunan kendala konveks yang terbatas. Sehingga formulasi *robust counterpart* menjadi computationally tractable.

Menurut Ben-Tal, *et al*. [5] untuk menganalisis *robust counterpart* yang *computationally tractable* dapat dengan menunjukkan *Robust counterpart* tersebut dapat dibentuk menjadi linear, kendala konik kuadratik, atau semidefinit. Sehingga masalah dapat dikatakan sebagai *Linear Programming* (LP), *Conic Quadratic Optimization* (CQO), atau *Semi-definite Optimization* (SDO) seperti dinyatakan dalam Teorema 1.

Teorema 1 (Ben-Tal, A., *dan* Nemirovski, A. [4])
Asumsikan himpunan ketidakpastian $\mathcal{U}$ *pada* (2) *merupakan affine image dari himpunan terbatas* $Z = \{\zeta\} \subset R^N$, *dan* Z *merupakan:*

1. *Sistem dari kendala pertidaksamaan linear*

$$P\zeta \leq p \quad (13)$$

2. *Sistem dari pertidaksamaan Conic Quadratic*

$$\|P_i\zeta - p_i\|_2 \leq q_i^T \zeta - r_i, i = 1, \dots, M \quad (14)$$

3. *Sistem dari pertidaksamaan Matriks Linear*

$$P_0 + \sum_{i=1}^{\dim \zeta} \zeta_i P_i \geq 0 \quad (15)$$

Pada kasus (ii) dan (iii) juga diasumsikan bahwa sistem dari kendala yang mendefinisikan $\mathcal{U}$ *adalah strictly feasible maka Robust counterpart (4) dari Pemrograman Linear tak tentu (2) ekivalen dengan:*

1. *Masalah Pemrograman Linear pada kasus (i)*
2. *Masalah Conic Quadratic pada kasus (ii)*
3. *Masalah Semidefinit pada kasus (iii)*

Bukti: Telah dibahas secara lengkap oleh Ben-Tal, A., *dan* Nemirovski, A. [4]) dan bentuk pembuktian lainnya dibahas oleh Chaerani dan Roos (lihat [11]).

ROBUST COUNTERPART UNTUK HIMPUNAN BOX UNCERTAINTY DAN ELLIPSOIDAL UNCERTAINTY

Formulasi dari Model Optimisasi *Robust counterpart* terkait dengan pemilihan himpunan ketidakpastian $\mathcal{U}$. Menurut Gorissen, *et al*. [9], Optimisasi *Robust* adalah memberikan pendekatan aman yang *tractable* dari kendala pada kasus, yaitu formulasi *tractable* yang menjamin kendala memenuhi:

$$x \text{ memenuhi } a(\zeta)^T x \leq d, \forall \zeta \in \mathcal{U}_\varepsilon \Longrightarrow x \text{ memenuhi } P_\zeta(\, a(\zeta)^T x \leq d) \geq 1 - \varepsilon \qquad (16)$$

Untuk $\varepsilon = 0$, maka kendala merupakan kendala *robust* klasik. Tantangan yang muncul adalah menentukan himpunan $\mathcal{U}_\varepsilon$ untuk nilai ε yang lain. Kasus paling sederhana adalah ketika hanya diketahui $\|\zeta\|_\infty \leq 1$. Untuk kasus tersebut, himpunan *box uncertainty* merupakan satu-satunya himpunan yang dapat memberikan jaminan probabilitas (untuk $\varepsilon = 0$).

Menurut Gorissen, *et al*. [9] sebuah himpunan *box uncertainty* yang memuat berbagai macam realisasi untuk setiap komponen ζ merupakan pilihan yang paling *robust* dan menjamin bahwa kendala tidak pernah dilanggar, tetapi di sisi lain hanya ada kemungkinan kecil semua parameter ketidakpastian mengambil nilai kasus terburuk. Hal ini menyebabkan perkembangan himpunan ketidakpastian yang lebih kecil yang masih menjamin bahwa kendala “hampir tidak pernah” dilanggar, yaitu *ellipsoidal uncertainty* yang mungkin berpotongan dengan *box uncertainty*. Dalam Gorissen, *et al*. [9], dibahas bahwa himpunan *box uncertainty* dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$Z = \{\|\zeta\|_\infty \leq 1\} \qquad (17)$$

Sehingga dapat didefinisikan himpunan $\mathcal{U}$:

$$\mathcal{U} = \{a: a = \bar{a} + P\zeta, \|\zeta\|_\infty \leq 1\} \qquad (18)$$

Untuk memperoleh formulasi *Robust counterpart* dari himpunan *box uncertainty*, maka himpunan *box uncertainty* harus diterapkan pada pertidaksamaan (12) sehingga diperoleh:

$$(\bar{a} + P\zeta)^T x \leq d, \forall \zeta: \|\zeta\|_\infty \leq 1 \qquad (19)$$

atau dapat ditulis kembali sebagai berikut

$$\max_{\zeta:\|\zeta\|_\infty \leq 1} (\bar{a} + P\zeta)^T x = \bar{a}^T x + \max_{\zeta:\|\zeta\|_\infty \leq 1} (P^T x)^T \zeta \leq d \qquad (20)$$

Dengan menggunakan sifat norm seperti dapat dirujuk dari Hunter [13] dan Olver [14], norm-1 dari vektor $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)^T \in R^n$ didefinisikan sebagai penjumlahan dari nilai absolut setiap anggotanya:

$$\|v\|_1 = |v_1| + |v_2| + \cdots + |v_n| \qquad (21)$$

Maksimum atau norm-∞ merupakan entri dengan nilai maksimal pada nilai absolutnya:

$$\|v\|_\infty = \max\{|v_1|, |v_2|, \dots, |v_n|\} \qquad (22)$$

diketahui bahwa:

$$\max_{\zeta:\|\zeta\|_\infty \leq 1} (P^T x)^T \zeta = \max_{\zeta:|\zeta_i| \leq 1} \textstyle\sum_i (P^T x)_i \zeta_i = \sum_i |(P^T x)_i| = \|P^T x\|_1 \qquad (23)$$

Berdasarkan persamaan (23) diperoleh formulasi *robust counterpart* dari persamaan (20) yang ekivalen dengan pertidaksamaan (19):

$$\bar{a}^T x + \|P^T x\|_1 \leq d \qquad (24)$$

Selanjutnya, merujuk kepada Hertog, *et al*. [10], *robust counterpart* (24) dapat dengan mudah dimodelkan sebagai kendala linear. Hal ini mengakibatkan bahwa *robust counterpart* memiliki tipe yang sama dengan masalah awal, yaitu kendala linear, meskipun banyak variabel dan kendala bertambah. *Robust counterpart* dapat ditunjukkan dalam bentuk kendala linear, maka masalah tersebut dapat dikategorikan sebagai masalah pemrograman linear, sehingga *robust counterpart* dapat dijamin *computationally tractable*.

ISBN: 978-602-61045-2-6

Berdasarkan pembahasan yang disajikan oleh Gorissen, *et al*. [9], himpunan *ellipsoidal uncertainty* dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$Z = \{\|\zeta\|_2 \leq 1\} \tag{25}$$

sehingga dapat didefinisikan himpunan $\mathcal{U}$:

$$\mathcal{U} = \{a: \bar{a} + P\zeta, \|\zeta\|_2 \leq 1\} \tag{26}$$

Untuk memperoleh formulasi *robust counterpart* dari himpunan *ellipsoidal uncertainty*, maka himpunan *ellipsoidal uncertainty* harus diterapkan pada pertidaksamaan (12) sehingga diperoleh:

$$(\bar{a} + P\zeta)^T x \leq d \ \forall \zeta: \|\zeta\|_2 \leq 1 \tag{27}$$

Pertidaksamaan tersebut ekivalen dengan:

$$\max_{\zeta:\|\zeta\|_2 \leq 1} (\bar{a} + P\zeta)^T x = \bar{a}^T x + \max_{\zeta:\|\zeta\|_2 \leq 1} (Px)^T \zeta \leq d \tag{28}$$

Perhatikan bahwa untuk suatu x maka nilai terbaik pada kasus terburuk untuk pertidaksamaan di atas tercapai ketika dipilih vektor satuan

$$\zeta = \frac{P^T x}{\|P^T x\|} \tag{29}$$

sehingga

$$\max_{\zeta:\|\zeta\|_2 \leq 1} (Px)^T \zeta = \frac{(P^T x)^T (P^T x)}{\|P^T x\|} = \frac{(P^T x)^2}{\sqrt{(P^T x)^2}} = \sqrt{(P^T x)^2} = \|P^T x\|_2 \tag{30}$$

maka diperoleh formulasi *Robust counterpart* dari persamaan (28) yang ekivalen dengan pertidaksamaan (27)

$$\bar{a}^T x + \|P^T x\|_2 \leq d \tag{31}$$

Menurut Hertog, *et al*. [10], formulasi *robust counterpart* (31) merupakan kendala *conic quadratic programming* (CQO). *Robust counterpart* dapat ditunjukkan dalam bentuk kendala CQO, maka *robust counterpart* dapat dijamin *computationally tractable*.

Selanjutnya disajikan pembahasan mengenai bagaimana metode penyelesaian RC dengan Himpunan *Polihedral Uncertainty*.

PENYELESAIAN MODEL OPTIMISASI ROBUST DENGAN HIMPUNAN TAKTENTU POLIHEDRAL

Dalam kasus Himpunan Taktentu merupakan suatu polihedral yaitu suatu sistem pertidaksamaan nonlinear

$$(\bar{a} + P\zeta)^T x \leq b, \ \forall \zeta : (d - D\zeta) \geq 0. \tag{32}$$

Formulasi ini ekivalen dengan

$$\bar{a}^T x + \max_{\zeta: d - D\zeta \geq 0} (P^T x)\zeta \leq b. \tag{33}$$

Untuk formulasi ini, *robust counterpart* tidak dapat diperoleh secara eksplisit. Maka merujuk pada Hertog *et al* [10] fomulasi RC dapat diperoleh melalui formulasi dualnya. Perhatikan bahwa dengan Teori Dualitas diperoleh

$$\max\left\{(P^T x)\zeta : d - D\zeta \geq 0\right\} = \min\left\{d^T y : D^T y = P^T x, y \geq 0\right\}. \tag{34}$$

Maka x memenuhi (32) jika dan hanya jika x memenuhi

$$\bar{a}^T x + \min_y \left\{d^T y : D^T y = P^T x, y \geq 0\right\} \leq b. \tag{35}$$

Catat bahwa jika kendala ini dipenuhi untuk suatu variabel feasible y, yaitu memenuhi

$$D^T y = P^T x, y \geq 0 \tag{36}$$

maka kendala nya secara tentu memenuhi nilai minimum atas y. Dengan demikian, x memenuhi (32) jika dan hanya jika terdapat y ssedemikian hingga (x, y) memenuhi

$$\overline{a}^T x + d^T y \le b, D^T y = P^T x, y \ge 0. \qquad (37)$$

Hasil ini sangat tractable karena merupakan sistem persamaan linear dalam kesamaan atau pertidaksamaan.

Contoh Kasus: Model Optimisasi Robust Pada Masalah Lintasan Terpendek Untuk Pencarian Jalur Optimal Bus Sekolah Gratis Di Kota Bandung

Sebagai contoh kasus, dalam makalah ini dibahas penentuan model optimisasi robust pada masalah lintasan terpendek untuk pencarian jalur optimal bus sekolah gratis di Kota Bandung. Model optimisasi untuk lintasan terpendek terkait dengan jumlah Sekolah Menengah Atas (SMA) dan sederajat yang dikunjungi oleh bus sekolah gratis, waktu yang dilewati oleh bus sekolah gratis, kapasitas dari bus sekolah gratis, dan jumlah armada dari bus sekolah gratis. Model optimisasi ini memiliki fungsi objektif yaitu meminimumkan waktu tempuh perjalanan dari titik i ke titik j dan waktu tempuh perjalanan akan diasumsikan sangat besar untuk perjalanan yang tempat awal dan tempat tujuan yang sama ($i = j$).

Untuk mendapatkan *robust counterpart* digunakan ketidakpastian polihedral dimana himpunan unsur tak pasti diasumsikan berbentuk polihedral. Dalam penelitian ini, diasumsikan bahwa parameter data yang tidak pasti adalah koefisien pada fungsi objektif. Permasalahan tersebut dapat diformulasikan sebagai masalah lintasan terpendek tak tentu seperti di bawah ini:

minimumkan : $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$

dengan kendala : $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_{ji} - \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = \begin{cases} 1, i = s \\ 0, i \neq s, t \\ -1, i = t \end{cases} \qquad x_{ij} = \{0,1\} \qquad (38)$

$c \in U$

di mana c adalah vektor kolom yang merepresentasikan jarak atau waktu tempuh perjalanan dari node i ke node j, x adalah vektor kolom yang memuat variabel keputusan perjalanan dari node i ke node j dilakukan atau tidak. Fungsi objektif pada persamaan (38) memuat unsur tidak tentu maka fungsi objektif haruslah dikonstruksi menjadi sebuah fungsi objektif tentu dengan cara menghilangkan parameter tidak tentu dari fungsi objektif dan menyajikan dalam bentuk fungsi variabel tunggal t, sehingga diperoleh,

minimumkan : t

dengan kendala : $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \le t \qquad (39)$

$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_{ji} - \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = \begin{cases} 1, i = s \\ 0, i \neq s, t \\ -1, i = t \end{cases} \qquad x_{ij} = \{0,1\}$

$c \in U, t \ge 0$

Asumsikan bahwa himpunan ketidakpastian U memiliki bentuk $U = \{(c):(c) = (\bar{c}) + P\varsigma, \varsigma \in \mathcal{Z}\}$ dimana $\bar{c}$ adalah nominal vektor data, sehingga didapatkan formulasi *robust* sebagai berikut:

minimumkan : t

dengan kendala : $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(\bar{c}_{ij}+P\varsigma)x_{ij}\leq t$ (40)

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}x_{ji}-\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}x_{ij}=\begin{cases}1, i=s\\0, i\neq s,t\\-1, i=t\end{cases} \qquad x_{ij}=\{0,1\}$$

$\varsigma\in\mathcal{Z}, t\geq 0$

Asumsikan bahwa $\mathcal{Z}$ adalah himpunan unsur tak pasti yang berbentuk polihedral sebagai berikut:

$\mathcal{Z}=\{\varsigma: q-D\varsigma\geq 0\}$,

di mana $\mathcal{Z}\subset\mathbb{R}^L$ merupakan himpunan ketidakpastian primitif. Solusi $x\in\mathbb{R}^n$ dinamakan *Robust Feasible* jika memenuhi kendala ketidakpastian $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(\bar{c}_{ij}+P\varsigma)x_{ij}\leq t$ untuk setiap $\varsigma\in\mathcal{Z}$. Selanjutnya diterapkan tiga langkah untuk memperoleh *Robust Counterpart* berdasarkan himpunan ketidakpastian polihedral.

1. Langkah Satu (Formulasi Kasus Terburuk)
   Persamaan (40) ekuivalen dengan reformulasi kasus terburuk sebagai berikut
   $$\mathrm{c_{ij}x_{ij}}+\max_{\varsigma:D\varsigma+q\geq 0}(P^T\mathrm{x_{ij}})^T\varsigma\leq t \qquad (41)$$
2. Langkah Dua (Dualitas)
   Ambil dual dari masalah maksimisasi dalam pada persamaan (41). Masalah maksimasi dalam dan hasil dari dual tersebut merupakan nilai objektif optimal yang sama oleh dualitas yang kuat. Maka (41) ekuivalen dengan
   $$\mathrm{c_{ij}x_{ij}}+\min_{w}\{q^Tw_{ij}: D^Tw_{ij}=P^T\mathrm{x_{ij}}, w_{ij}\geq 0\}\leq t \quad (42)$$
3. Langkah Tiga (*Robust Counterpart*)
   Penting untuk memperlihatkan bahwa bagian minimasi pada persamaan (42) dapat di abaikan, karena kendala yang memuat w paling tidak satu dapat di katakan cukup. Maka, formulasi akhir dari *Robust Counterpart* adalah
   $$\exists\, w_{ij}: \mathrm{c_{ij}x_{ij}}+q_{ij}w_{ij}\leq t, D^Tw_{ij}=P^T\mathrm{x_{ij}},\ w_{ij}\geq 0 \qquad (43)$$

Kendala pada (43) merupakan linier pada $x\in\mathbb{R}^n$ dan $w\in\mathbb{R}^m$. Sehingga, persamaan *robust shortest path* pada ketidakpastian polihedral adalah sebagai berikut:

minimumkan : t

dengan kendala : $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\bar{c}_{ij}x_{ij}+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}q_{ij}w_{ij}\leq t$ (44)

$$D^Tw_{ij}=P^T\mathrm{x_{ij}}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}x_{ij}-\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}x_{ji}=\begin{cases}1, i=s\\0, i\neq s,t\\-1, i=t\end{cases} \qquad x_{ij}, w_{ij}=\{0,1\}$$

$t\geq 0$

Dapat dilihat bahwa (44) adalah masalah Pemrograman Bilangan Bulat Campuran, sehingga merujuk pada Teorema 1 pada Ben-Tal & Nemirovski [4] dan Chaerani & Ross [11], maka (44) merupakan *Robust Counterpart* dari masalah lintasan terpendek tak tentu (38) yang dapat dikategorikan sebagai masalah yang dapat diselesaikan secara komputasi. Formulasi (44) diselesaikan dengan Metode *Branch and Bound*.

Penentuan Jalur Terpendek yang Robust Untuk Jalur Bus Sekolah Gratis di Kota Bandung dengan Himpunan Taktentu Polihedral

Merujuk pada data dari PPID [17], terdapat empat koridor jalur bus sekolah gratis di Kota Bandung seperti dapat dilihat pada Gambar 1. Rute perjalanan lengkap adalah sebagai berikut.

1. *Rute perjalanan bus sekolah gratis koridor satu*
   Data untuk simulasi numerik pada kasus ini didapatkan dari Google Maps, bus sekolah gratis harus mengunjungi seluruh halte pada koridor satu, yaitu: (1) Terminal Ledeng, (2) Halte Setiabudi, (3) Halte Cihampelas, (4) Halte Riau, (5) Halte Riau (KFC), (6) Halte Riau (Ahmad Yani), (7) Halte Cicadas, dan (8) Halte Antapani.
2. *Rute perjalanan bus sekolah gratis koridor dua*
   Data untuk simulasi numerik pada kasus ini didapatkan dari Google Maps, bus sekolah gratis harus mengunjungi seluruh halte pada koridor satu, yaitu: (1) Halte Dago, (2) Halte Dago Atas, (3) Halte Dago (Darul Hikam), (4) Halte Dago (SMA 1), (5) Halte Merdeka (St. Angela), (6) Halte Merdeka (SD Merdeka), (7) Halte Sumatera (SMP 2), (8) Halte Lengkong Besar, (9) Halte Belitung (SMA 3), (10) Halte Lengkong Besar (SD Lengkong), (11) Halte Ibu Inggit Ganarsih, (12) Halte BKR (PT. Inti), dan (13) Terminal Leuwi panjang.
3. *Rute perjalanan bus sekolah gratis koridor tiga*
   Data untuk simulasi numerik pada kasus ini didapatkan dari Google Maps, bus sekolah gratis harus mengunjungi seluruh halte pada koridor satu, yaitu: (1) Halte Cibiru, (2) Halte Soekarno Hatta, (3) Halte Buah Batu, (4) Halte Karapitan, (5) Halte Asia Afrika, (6) Halte Otista, (7) Halte Lingkar Selatan, dan (8) Halte Hotel Horison.
4. *Rute perjalanan bus sekolah gratis koridor empat*
   Data untuk simulasi numerik pada kasus ini didapatkan dari Google Maps, bus sekolah gratis harus mengunjungi seluruh halte pada koridor satu, yaitu: (1) Halte Cibiru, Gedebage, (2) Halte Kiaracondong, (3) Halte Buah Batu, (4) Halte Batununggal, (5) Halte Moch. Toha, (6) Halte Mekarwangi, (7) Terminal Leuwipanjang, (8) Halte Kopo, Caringin, (9) Halte Pasirkoja, (10) Halte Cijerah, (11) Halte Cibereum, (12) Halte Elang, (13) Halte Rajawali, (14) Halte Nurtanio, dan (15) Halte Sudirman.

Hasil perhitungan model optimisasi lintasan terpendek pada setiap koridor disajikan dalam Tabel nilai fungsi objektif dari solusi optimal dari Model Optimisasi Lintasan Terpendek dan Model Optimisasi *Robust Shortest Path* dengan *Polyhedral Uncertainty* untuk masalah pencarian rute bus sekolah gratis di Kota Bandung.

TABEL I. TABEL HASIL SIMULASI NUMERIK (DALAM MENIT)

Koridor	Solusi Optimal SP	Solusi Optimal RSP	Δ
Koridor satu	61	67.3391910701471	6.33919107
Koridor dua	86	94.5562963578946	8.556296358
Koridor tiga	61	77.5680456622815	16.56804566
Koridor empat	133	136.080351234168	3.080351234

Tabel I menyajikan *best worst case solution* untuk Model Optimisasi *Robust Shortest Path Problem*, solusi optimal yang didapat dari Model Optimisasi *Robust Shortest Path Problem* menghasilkan nilai fungsi objektif yang lebih besar dari solusi optimal yang didapat dari Model Optimisasi Lintasan Terpendek. Hal ini terjadi karena pada Optimisasi *Robust* memperhitungkan faktor tak tentu yang mewakili kemungkinan terburuk yang mungkin terjadi, seperti kemacetan atau pun kondisi jalan yang kurang baik. Lebih jauh, hasil perhitungan pada model robust ini menjamin *computational tractability* dari model. Perlu disebutkan bahwa formulasi RC sebagai *linear* dan *conic quadratic* optimisasi diperlukan untuk menjamin eksistensi solusi optimal global. Sehingga isu penting untuk memperoleh formulasi RC yang computationally tractable telah dipenuhi.

KESIMPULAN

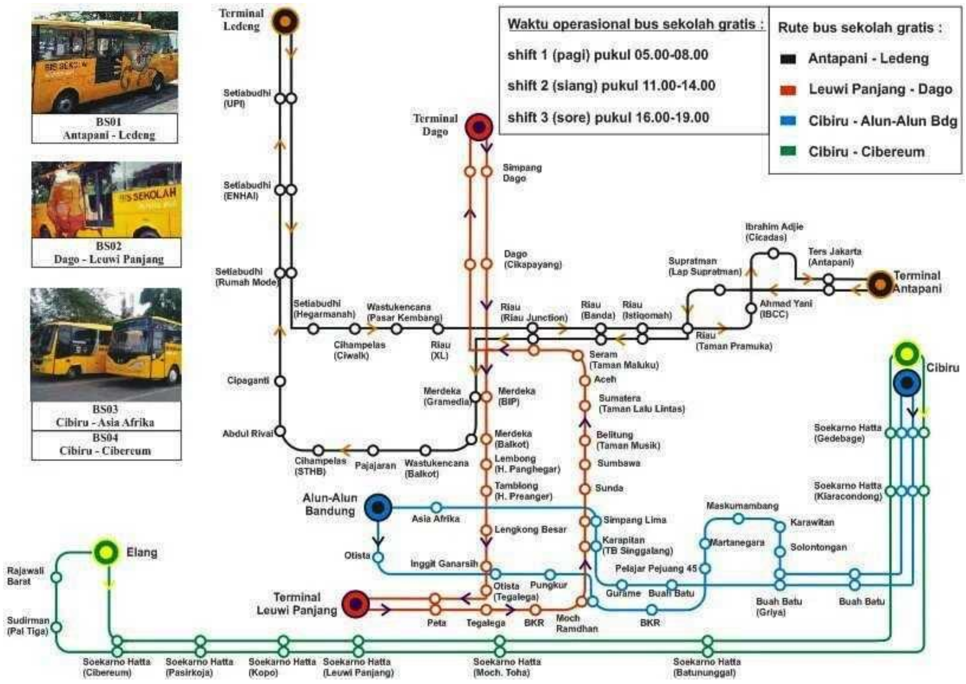
Dalam makalah ini dibahas bagaimana pemodelan untuk masalah optimisasi taktentu denganmenggunakan asumsi bahwa data taktentu yang terlibat diasumsikan merupakan himpunan taktentu polihedral. Kajian

ISBN: 978-602-61045-2-6

masalah ini dapat dipandang sebagai salah satu cara untuk menentukan tingkat robustness dari masalah optimisasi taktentu, dimana diharapkan formulasi robust counterpart dapat dinyatakan dalam salah satu kelas masalah optimisasi yang *computationally tractable*. Untuk mencapai kondisi *computationally tractable* tersebut, berbeda dengan asumsi himpunan taktentu dengan box dan ellipsoidal uncertainty, dalam polihendra uncertainty penyelesaian harus ditempuh melalui teori dualitas dalam optimisasi konveks.

UCAPAN TERIMA KASIH

Penelitian ini didanai oleh Penelitian Berbasis Kompetensi Kementerian Riset Teknologi dan Pendidikan Tinggi untuk Tahun 2017 dengan nomor SPPK Nomor: 718/UN6.3.1/PL/2017 Tanggal 17 April 2017, serta didukung oleh bantuan literatur dari *TWAS Individual Research Grant* 2016-2017 dengan no kontrak *15-253RG/MATH/AS_I*.



Gambar 1. Rute Bus Sekolah di Kota Bandung [17]

REFERENSI

1. Mulvey, J.M., Vanderbei, R.J., and Zenios, S.A., Robust Optimization of Large-Scale Sys-tems, *Operations research*, 43(2), 1995, pp.264-281.
2. Gabrel, V., Murat, C., and Thiele, A., Recent Advances in Robust Optimization: An Overview, *European Journal of Operational Research*, 235(3), 2014, pp.471-483.
3. Ben-Tal, A., Nemirovski, A. Robust Solutions of Linear Programming Problems Contaminated with Uncertain Data, *Mathematical Programming*., 88(3), 2000, pp. 411–421.
4. Ben-Tal, A, and Nemirovski, A., Robust Optimization-Methodology and Applications, *Mathematical Programming*, 92(3), 2002, pp. 453-480.
5. Ben-Tal, A., El Ghaoui, L., and Nemirovski, A. *Robust Optimization*, ISBN: 9780691143682, Princeton Series in Applied Mathematics., 2009.
6. Bertsimas, D., and Sim, M., The Price of Robustness, *Operations Research*, 52(1), 2004, pp. 35–53.
7. Bertsimas, D., Brown, D.B., and Caramanis, C., Theory and Application of Robust Optimization., *SIAM Rev.*, 53(3), 2011, pp. 464–501.
8. Goerigk., M, and Schöbel, A., Algorithm Engineering in Robust Optimization, *Algorithm Engineering*, pp. 245-279., Springer International Publishing, 2016.
9. Gorissen, B.L., Yanikoglu, I., and Hertog, D.D., A Practical Guide to Robust Optimization., *Omega*: *The International Journal of Management Science*, 53, 2015, pp 124-137.

10. Hertog, D.D, Ben-Tal, A., and Brekelmans, R. *Practical Robust Optimization*. Lecture Notes LNMB Course Spring 2015, Tilburg University., 2015
11. Chaerani, D., Roos, C., Handling Optimization under Uncertainty Problem Using Robust Counterpart Methodology, *Jurnal Teknik Industri*, 15(2), 2013, pp. 111-118.
12. Wolsey, L.A., *Integer Programming*, 42, New York: Wiley, 1998.
13. Hunter, J. K. *An Introduction to Real Analysis*. Department of Mathematics, University of California at Davis., 2014.
14. Olver, P. J., *Numerical Analysis Lecture Notes*. Minnesota: University of Minnesota., 2008.
15. Ben-Tal A., Goryashko A., Guslitzer E., and Nemirovski, A., Adjustable Robust Solutions of Uncertain Linear Programs., *Mathematical Programming*, 99(2), 2008, pp. 351-376.
16. Ben-Tal, A, and Nemirovski, A., Selected Topics in Robust Convex Optimization, *Mathematical Programming*, 112 (1), 2008, pp. 125-158.
17. Rute Bus Sekolah di Kota Bandung, https://ppid.bandung.go.id/informasi/rute-bus-sekolah-kota-bandung/, diakses 26 Juni 2017.