

Dinamika Satu-Dimensi Butiran Berbentuk Bola yang Terapung pada Permukaan Fluida

Sparisoma Viridi^{1,a)}, Nurhayati^{2,b)}, Johri Sabaryati^{3c)}

¹Laboratorium Fisika Granular dan Fluida,
Kelompok Keilmuan Fisika Fisika Nuklir dan Biofisika,
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Institut Teknologi Bandung,
Jl. Ganesha no. 10, Bandung 40132, Indonesia

²Laboratorium Teknik Fisika,
Fakultas Sains dan Teknologi, UIN Ar-Raniry,
Jl. Syekh Abdul Rauf, Kopelma Darussalam, Banda Aceh 23111, Indonesia

³Program Studi Pendidikan Fisika,
FKIP Universitas Muhammadiyah Mataram,
Jl. KH Ahmad Dahlan no. 1, Pagesangan, Mataram 83127, Indonesia

^{a)}dudung@gmail.com (corresponding author)

^{b)}firstnur1708@gmail.com

^{c)}joyafarashy@gmail.com

Abstrak

Butiran dengan massa jenis ρ_b yang terapung di atas fluida dengan massa jenis ρ_f akan bergerak vertikal bergantung pada posisi permukaan fluida z_f . Dengan adanya pengaruh gaya gravitasi F_G dan gaya angkat (gaya Archimedes) F_A , gerak vertikal benda akan sedikit terlambat (tertunda) sebesar τ dibandingkan dengan gerak vertikal permukaan fluida, atau posisi $z_b(t) \approx z_f(t + \tau)$. Dengan asumsi bahwa permukaan fluida selalu tegak lurus arah gaya gravitasi atau ukuran butiran D_b jauh lebih kecil dari panjang gelombang permukaan fluida λ_f , dapat diamati dinamika permukaan fluida dengan menggunakan sebuah butiran, yang tidak tepat sama dengan dinamika permukaan fluida (perambatan gelombang) itu sendiri. Diusulkan hipotesis bahwa waktu tunda $\tau = \tau(\rho_b)$, dengan $F_G = F_G(V_b, \rho_b)$ and $F_A = F_A(V, \rho_f)$, di mana V_b adalah volume butiran dan V_f adalah volume butiran yang tercelup.

Kata-kata kunci: butiran berbentuk bola, gaya Archimedes, gaya gravitasi, gaya gesek, gelombang.

PENDAHULUAN

Dinamika benda terapung merupakan suatu sistem fisis yang menarik untuk dibahas [1], karena selain dapat dimanfaatkan, misalnya sebagai pembangkit gelombang [2], juga dapat menjelaskan mengapa telur hewan laut dapat terapung [3], fenomena gelembung-gelembung pada permukaan air saling berdekatan [4], serta efek optik yang terjadi [5]. Selain gerak benda terapung dapat membangkitkan gelombang [2], gelombang juga membuat benda terapung bergerak [6], yang dapat disederhanakan menjadi gerak hanya pada arah vertikal [7]. Selain gaya gravitasi, gaya apung, serta gaya gesek fluida, untuk benda-benda berukuran kecil gaya tegangan permukaan juga perlu diperhitungkan [8], yang dalam penelitian ini diabaikan untuk penyederhanaan, sehingga pembahasan dapat lebih difokuskan hanya pada bagaimana gerak benda terapung apabila dikaitkan dengan gerak vertikal permukaan fluidanya.

TEORI

Suatu butiran berbentuk bola dengan diameter D_b yang terletak pada posisi (x, y, z_b) memiliki persamaan

$$x^2 + y^2 + (z - z_b)^2 = \frac{1}{8} D_b^2, \tag{1}$$

yang dengan menggunakan koordinat silinder, dengan

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \tag{2}$$

akan memiliki elemen volume berbentuk lingkaran

$$dV = dz \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{\frac{1}{8} D_b^2 - (z - z_b)^2}} r dr = 2\pi \left[\frac{1}{4} D_b^2 - (z - z_b)^2 \right] dz, \tag{3}$$

yang apabila diintegrasikan dengan batas-batasnya

$$V = 2\pi \left[\frac{1}{4} D_b^2 (z - z_b) - \frac{1}{3} (z - z_b)^3 \right]_{z = z_b - \frac{1}{2} D_b}^{z_b + \frac{1}{2} D_b}, \tag{4}$$

akan memiliki volume

$$V_b = \frac{1}{6} \pi D_b^3, \tag{5}$$

dan dengan massa jenis ρ_b akan memiliki massa

$$m_b = \frac{1}{6} \pi D_b^3 \rho_b, \tag{6}$$

sehingga gaya gravitasi bumi yang bekerja pada butiran tersebut adalah

$$\vec{F}_G = \frac{1}{6} \pi D_b^3 \rho_b \vec{g}, \tag{7}$$

dengan \vec{g} adalah percepatan gravitasi bumi. Untuk butiran yang tidak menyentuh dan berada di atas fluida atau $z_f + \frac{1}{2} D_b \leq z$ maka volume butiran yang tercelup

$$V_f(z_f + \frac{1}{2} D_b \leq z) = 0 \tag{8}$$

dan yang keseluruhannya berada dalam fluida atau $z \leq z_f - \frac{1}{2} D_b$ adalah

$$V_f(z \leq z_f - \frac{1}{2} D_b) = \frac{1}{6} \pi D_b^3. \tag{9}$$

Dan untuk yang tercelup sebagian atau untuk $z_f - \frac{1}{2} D_b \leq z \leq z_f + \frac{1}{2} D_b$ dapat diperoleh dengan menggunakan Persamaan (4) dengan batas dari $z = z - \frac{1}{2} D_b$ sampai z_f yang akan memberikan

$$V_f = 2\pi \left[\frac{1}{4} D_b^2 (z - z_b) - \frac{1}{3} (z - z_b)^3 \right]_{z_b - \frac{1}{2} D_b}^{z_f} = 2\pi \left\{ \frac{1}{4} \left[(z_f - z_b) + \frac{1}{2} D_b \right] - \frac{1}{3} \left[(z_f - z_b)^2 + \frac{1}{8} D_b^3 \right] \right\}. \tag{10}$$

Untuk butiran yang berada pada posisi z maka Persamaan (10) akan menjadi

$$V_f 2\pi \left\{ \frac{1}{4} \left[(z_f - z) + D_b \right] - \frac{1}{3} \left[(z_f - z)^2 + \frac{1}{8} D_b^3 \right] \right\}. \tag{11}$$

Selanjutnya

$$V_f = \begin{cases} 0, & z_f + \frac{1}{2} D_b \leq z, \\ \pi \left\{ \frac{1}{4} D_b^2 \left[(z_f - z) + \frac{1}{2} D_b \right] - \frac{1}{3} \left[(z_f - z)^2 + \frac{1}{8} D_b^3 \right] \right\}, & z_f - \frac{1}{2} D_b \leq z \leq z_f + \frac{1}{2} D_b, \\ \frac{1}{6} \pi D_b^3, & z \leq z_f - \frac{1}{2} D_b. \end{cases} \tag{12}$$

memberikan volume butiran yang tercelup apabila terdapat sebuah butiran yang terapung pada permukaan fluida bermassa jenis ρ_f dengan posisi vertikal permukaan fluida adalah z_f dan posisi vertikal pusat massa butiran adalah z . Dengan menggunakan Persamaan (12) dapat diperoleh gaya angkat pada butiran

$$\vec{F}_A = \begin{cases} 0, & z_f + \frac{1}{2}D_b \leq z, \\ -\pi \left\{ \frac{1}{4}D_b^2 \left[(z_f - z) + \frac{1}{2}D_b \right] - \frac{1}{3} \left[(z_f - z)^3 + \frac{1}{8}D_b^3 \right] \right\} \rho_f \vec{g}, & z_f - \frac{1}{2}D_b \leq z \leq z_f + \frac{1}{2}D_b, \\ -\frac{1}{6} \pi D_b^3 \rho_f \vec{g}, & z \leq z_f - \frac{1}{2}D_b. \end{cases} \quad (13)$$

Gaya gesek fluida yang semula berbentuk

$$\vec{F}_D = -3\pi\eta D(\vec{v} - \vec{v}_f), \quad (14)$$

untuk benda berbentuk bola yang tercelup seluruhnya dalam fluida dengan viskositas η_f , perlu dimodifikasi yang bergantung dengan posisi vertikal benda z relatif terhadap posisi vertikal permukaan fluida z_f , sehingga dapat diperoleh

$$\vec{F}_D = \begin{cases} 0, & z_f + \frac{1}{2}D_b \leq z, \\ -6\pi\eta_f \sqrt{\frac{1}{4}D_b^2 - (z_f - z)^2} (\vec{v} - \vec{v}_f), & z_f \leq z \leq z_f + \frac{1}{2}D_b, \\ -3\eta_f D\vec{v}, & z \leq z_f, \end{cases} \quad (15)$$

dengan \vec{v}_f adalah kecepatan fluida. Dari Persamaan (11), (13), dan (15) dapat diperoleh total gaya-gaya yang bekerja pada butiran

$$\vec{F}(z_f) = \vec{F}_G + \vec{F}_A(z_f) + \vec{F}_D(z_f), \quad (16)$$

yang merupakan fungsi dari posisi vertikal permukaan fluida z_f . Dengan menggunakan Hukum II Newton mengenai gerak lurus dapat diperoleh

$$\vec{a}(z_f) = \frac{1}{m_b} [\vec{F}_G + \vec{F}_A(z_f) + \vec{F}_D(z_f)], \quad (17)$$

yang juga fungsi dari z_f . Bila

$$z_f = z_f(t), \quad (18)$$

maka percepatan butiran setiap saat juga akan merupakan fungsi waktu t . Kecepatan dan posisi setiap saat butiran diperoleh melalui

$$\vec{v}(t) = \vec{v}(0) + \int_0^t \vec{a}[z_f(t)] dt, \quad (19)$$

dan

$$\vec{r}(t) = \vec{r}(0) + \int_0^t \vec{v} dt. \quad (20)$$

Untuk saat ini sistem disederhanakan menjadi sistem satu-dimensi sehingga

$$\vec{a} \rightarrow a, \quad \vec{v} \rightarrow v, \quad \vec{r} \rightarrow z. \quad (21)$$

Selain itu perlu pula diperhatikan bahwa persamaan (15) memerlukan informasi \vec{v}_f yang terkait dengan turunan terhadap waktu t dari Persamaan (18).

METODE NUMERIK

Secara umum Persamaan (17)-(20) tidak mudah dipecahkan walaupun telah dijadikan persoalan satu-dimensi seperti dalam Persamaan (21). Untuk itu akan digunakan metode Euler untuk memecahkannya secara numerik

$$v(t + \Delta t) = v(t) + a(t)\Delta t \quad (22)$$

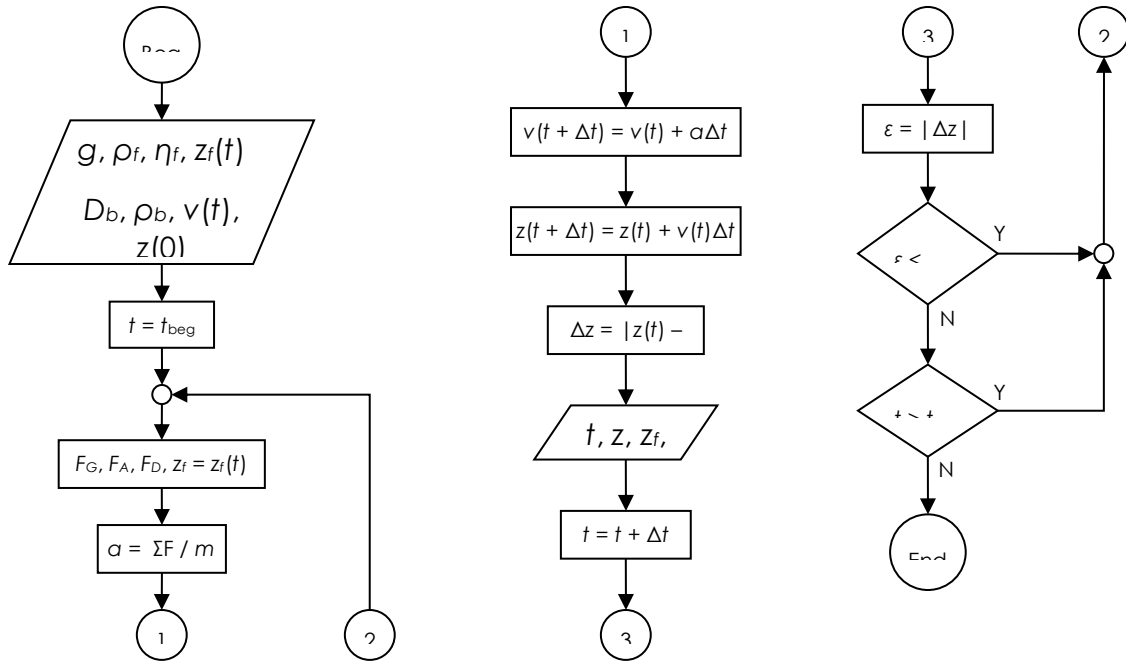
dan

$$z(t + \Delta t) = z(t) + v(t)\Delta t \tag{23}$$

Dan dengan membuat fungsi $z_f(t)$ maka dapat dibandingkan dengan $z(t)$ yang merupakan solusi yang diinginkan. Selain itu dapat pula dihitung selisihnya

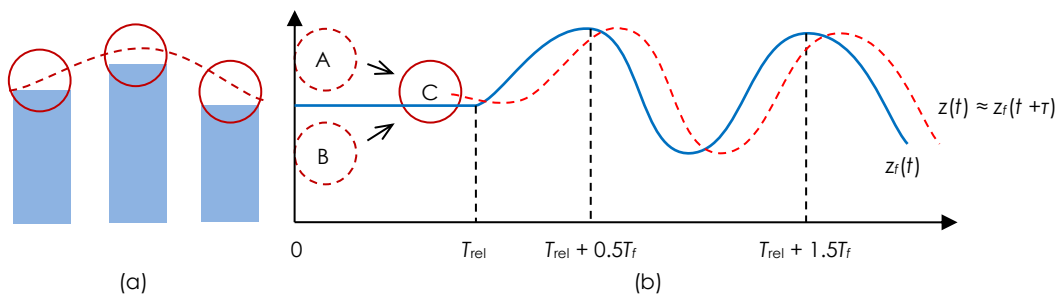
$$\Delta z = z(t) - z_f(t), \tag{24}$$

untuk melihat waktu tunda antara dinamika permukaan fluida dengan dinamika butiran yang terapung pada fluida tersebut.



Gambar 1. Diagram alir simulasi.

Simulasi dinamika butiran terapung akibat perubahan permukaan fluida dilakukan dengan menggunakan diagram alir yang disajikan dalam Gambar 1. Tinggi permukaan fluida yang merupakan fungsi waktu $z_f(t)$ terbagi menjadi dua bagian, yaitu bagian untuk relaksasi dan bagian yang berosilasi, sebagaimana diilustrasi-kan dalam Gambar 2.



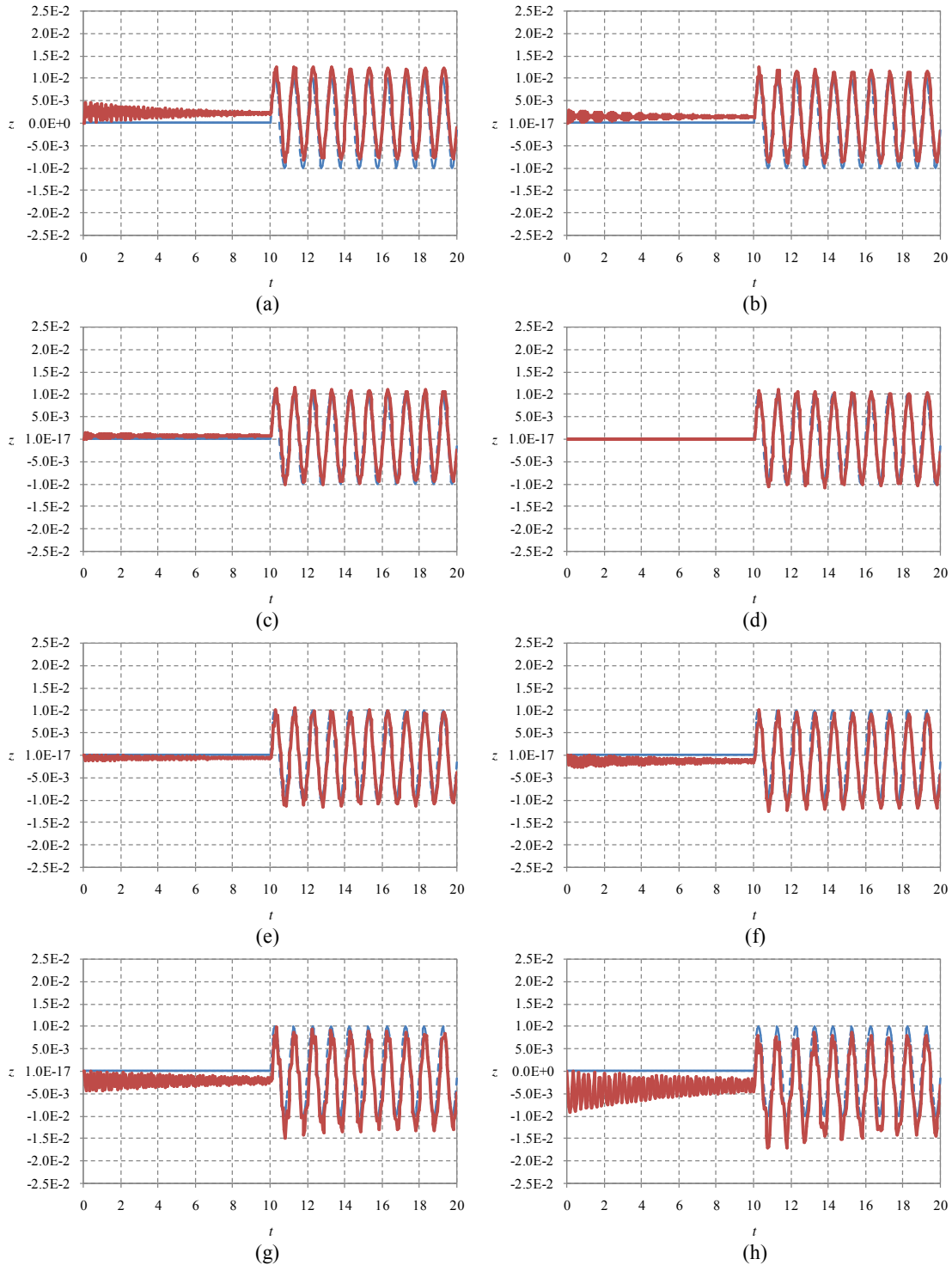
Gambar 2. (a) Dinamika butiran $z(t)$ akibat dinamika permukaan fluida $z_f(t)$, dan (b) Hubungan antara keduanya melalui $z(t) \approx z_f(t + \tau)$ dengan waktu relaksasi T_{rel} dan periode osilasi T_f .

Sebagai syarat awal butiran dapat berada dalam keadaan A atau B yang kemudian akan konvergen ke C dalam jangka waktu relaksasi T_{rel} . Setelah itu permukaan fluida akan berosilasi dengan fungsi sinusoidal berperiode T_f dengan amplitudo tertentu A_f .

HASIL DAN DISKUSI

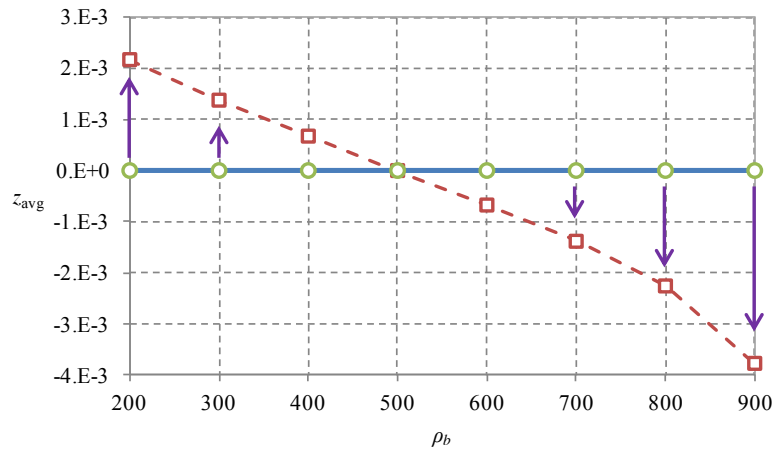
Simulasi dilakukan dengan nilai-nilai parameter $g = 9.81 \text{ m/s}^2$, $\rho_f = 1.00 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$, $\eta_f = 1.00 \times 10^{-3} \text{ Pa}\cdot\text{S}$ ($20 \text{ }^\circ\text{C}$) [4], $D_b = 1.00 \times 10^{-2} \text{ m}$, dan $\rho_b = (2 - 9) \times 10^2 \text{ kg/m}^3$, $\Delta t = 1.00 \times 10^{-3} \text{ s}$, $A_f = 1.00 \times 10^{-2} \text{ m}$, $T_f = 1 \text{ s}$, $T_{rel} = 10 \text{ s}$, $T_{data} = 0.05 \text{ s}$, $t_{end} = 20 \text{ s}$.

Posisi awal sama



Gambar 3. Dinamika permukaan fluida z_f (garis putus-putus berwarna biru) dan butiran z (garis utuh berwarna merah) untuk berbagai densitas butiran ρ_b : (a) 200, (b) 300, (c) 400, (d) 500, (e) 600, (f) 700, (g) 800, dan (h) 900 kg/m³.

Dengan menggunakan $z(0) = 0$, yang sama untuk semua nilai ρ_b , akan diperoleh hasil dalam Gambar 3. Selanjutnya, bagaimana posisi vertikal z dengan berubahnya posisi permukaan fluida z_f digambarkan pada Gambar 3 untuk berbagai nilai densitas butiran ρ_b yang berbeda mulai dari 200 sampai 900 kg/m³, dengan densitas fluida ρ_f adalah 1000 kg/m³. Terlihat bahwa untuk $\rho_b = 0.5 \rho_f$ proses relaksasi berlangsung paling cepat dikarenakan $z(0) = z_f(0)$ sedangkan pada nilai ρ_b lainnya, butiran memerlukan waktu untuk mencapai keadaan kesetimbangannya.



Gambar 4. Posisi rata-rata permukaan fluida z_f (garis utuh berwarna biru) dan butiran z (\square dan garis putus-putus berwarna merah) yang keduanya dinyatakan dalam satuan m, dengan posisi awal yang sama (\circ hijau).

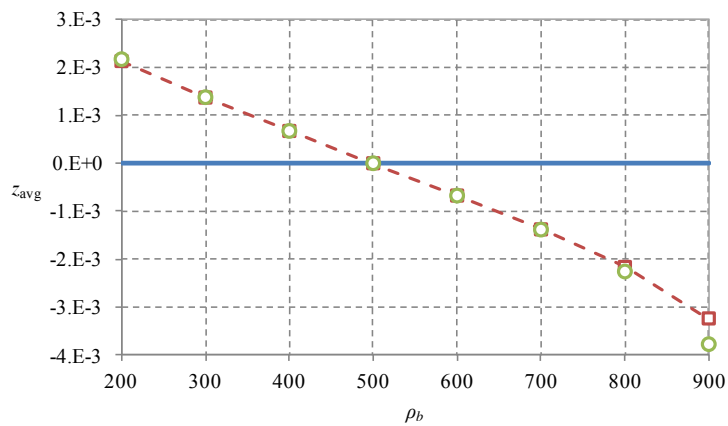
Posisi rata-rata butiran dapat diinterpretasikan sebagai posisi kesetimbangan yang dicapainya dan nilai ini bergantung pada nilai ρ_b relatif terhadap ρ_f . Data z_{avg} dalam Gambar 4 dilabelkan sebagai

$$z_{avg}^f[\rho_b, z(0)], \tag{25}$$

yang menggambarkan posisi vertikal akhir z_{avg}^f untuk berbagai densitas butiran ρ_b dengan posisi awalnya adalah $z(0)$.

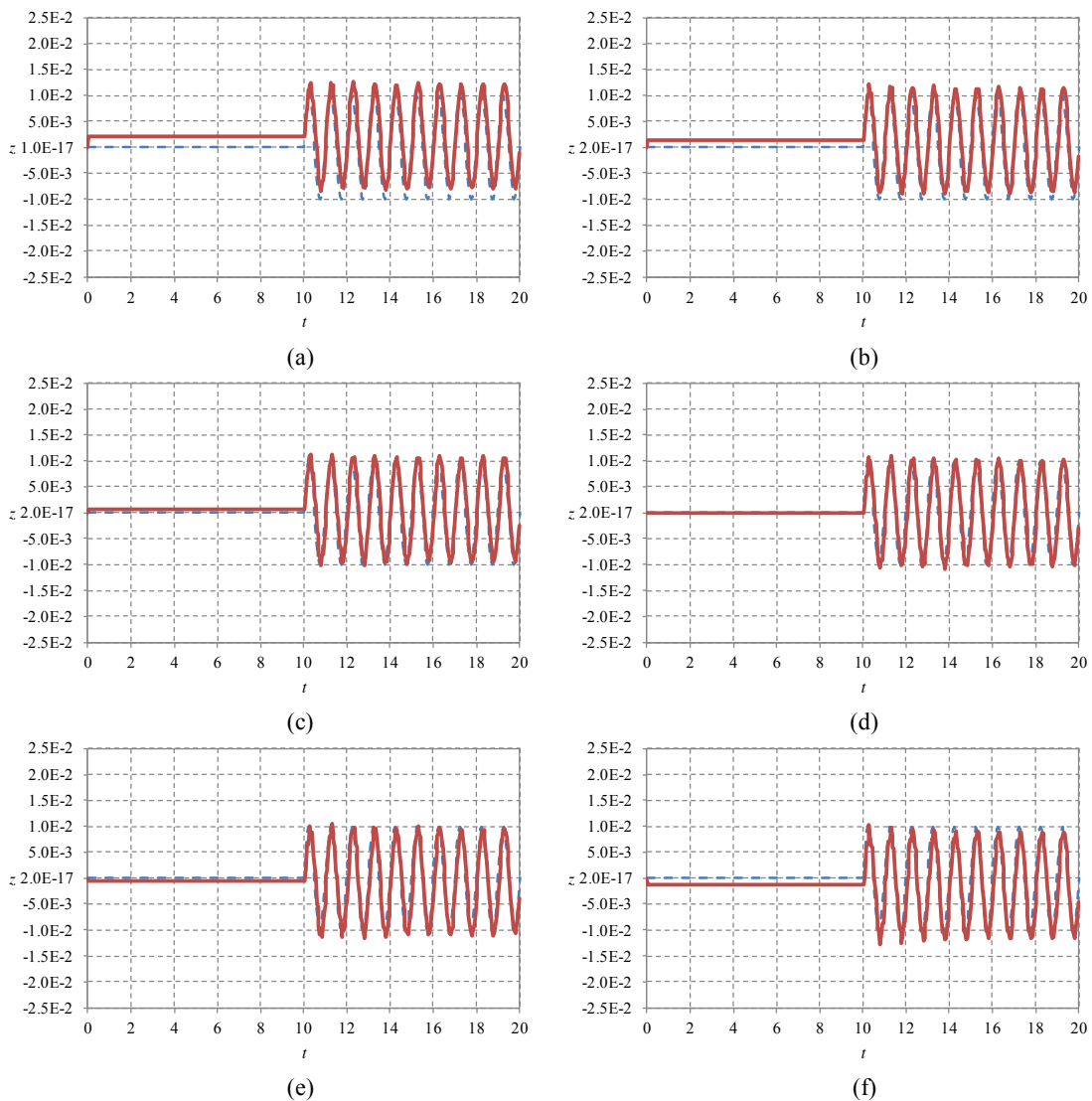
Posisi awal berbeda-beda

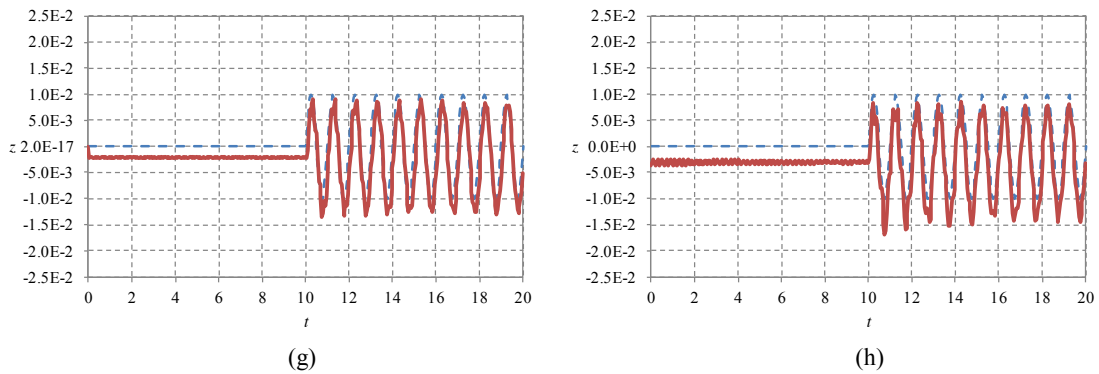
Dengan menggunakan Persamaan (25) posisi awal masing-masing butiran akan dibedakan agar keadaan akhir tidak berbeda jauh dengan keadaan awal serta keadaan stasioner dicapai lebih cepat sebagaimana diberikan dalam Gambar 5 dan 6 berikut ini.



Gambar 5. Posisi rata-rata permukaan fluida z_f (garis utuh berwarna biru) dan butiran z (\square dan garis putus-putus berwarna merah) yang keduanya dinyatakan dalam satuan m, dengan posisi awal yang sama (\circ hijau).

Terlihat dalam Gambar 5 bahwa kecuali untuk ρ_b bernilai 800 dan 900 kg/m^3 keadaan awal telah berhimpit dengan keadaan akhir, sehingga sistem dapat dikatakan telah berada dalam keadaan stasioner.





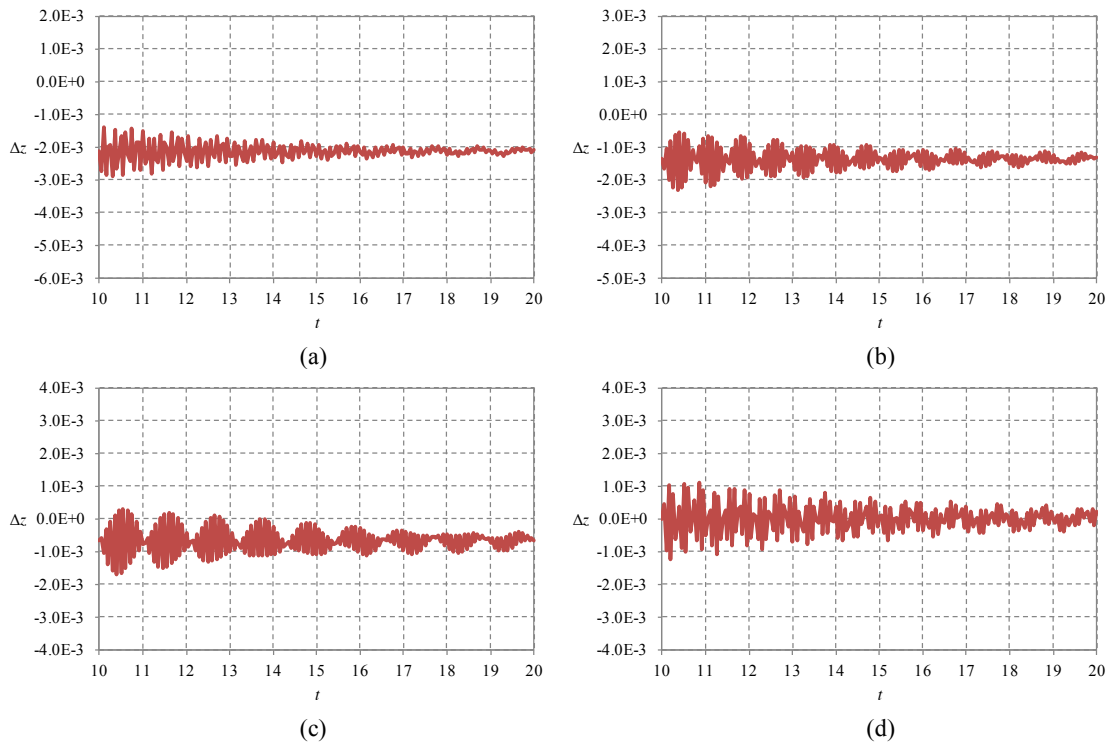
Gambar 6. Dinamika permukaan fluida z_f (garis putus-putus berwarna biru) dan butiran z (garis utuh berwarna merah) untuk berbagai densitas butiran ρ_b : (a) 200, (b) 300, (c) 400, (d) 500, (e) 600, (f) 700, (g) 800, dan (h) 900 kg/m^3 , dengan syarat awal seperti dalam Persamaan (25).

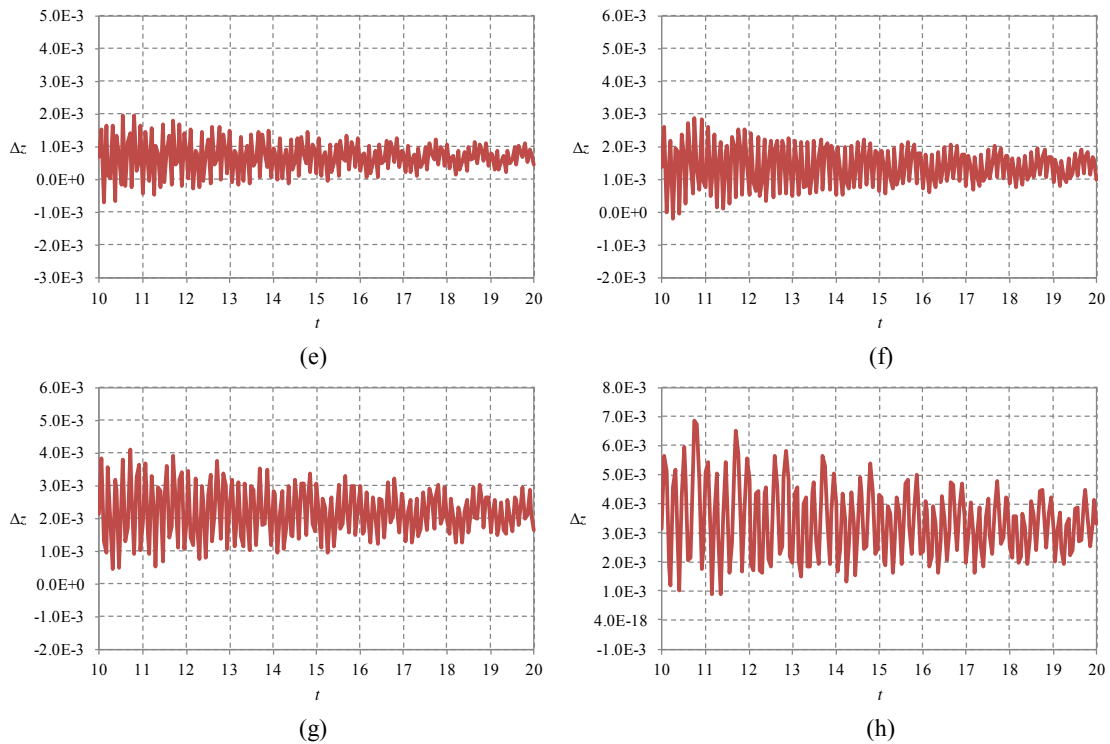
Pengaruh fasa awal

Hasil dari Persamaan (24) disajikan dalam Gambar 7 dengan posisi permukaan fluida diberikan oleh

$$z_f(t) = A_f \sin\left(\frac{2\pi}{T_f}t + \phi\right), \tag{26}$$

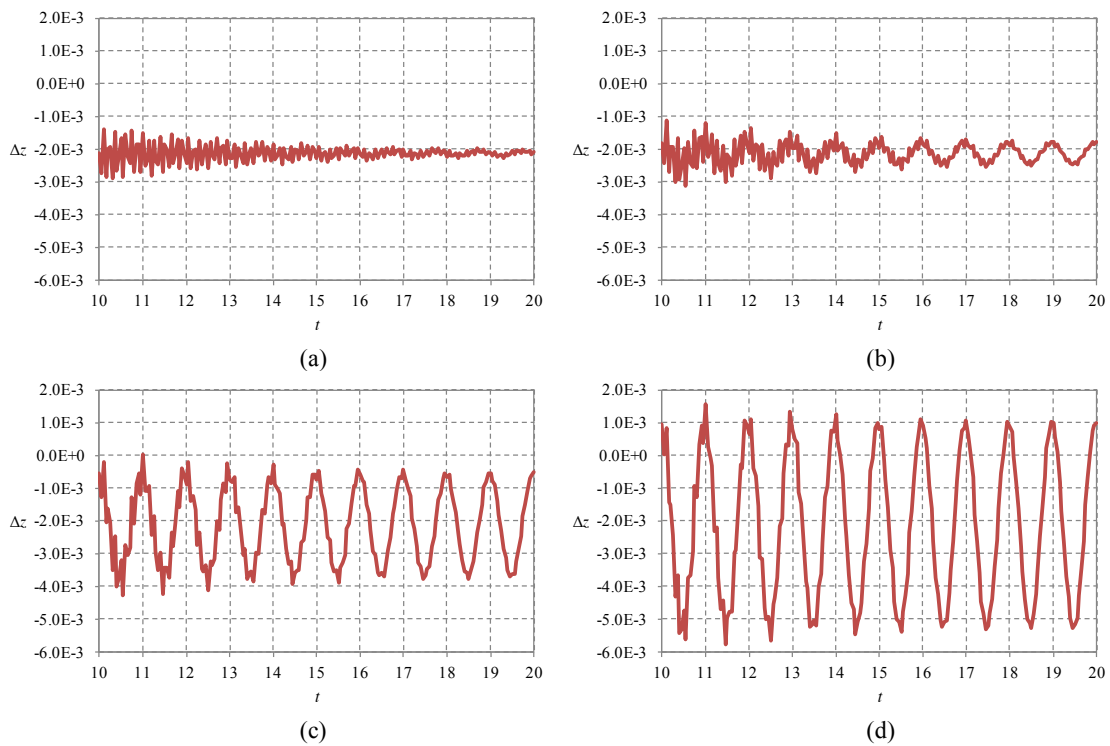
dengan τ yang seharusnya diberikan dalam $z(t + \tau)$ dapat pula diakomodasi dalam bentuk $z_f(t - \tau)$, yang lebih mudah mengingat Persamaan (26) bersifat kontinu sedangkan data yang dihasilkan $z(t) \rightarrow z_i$ bersifat diskrit, dengan $i = 1..N$, dan N adalah jumlah data. Hasil-hasil pada Gambar 7 menggambarkan bahwa $\tau \approx 0$.





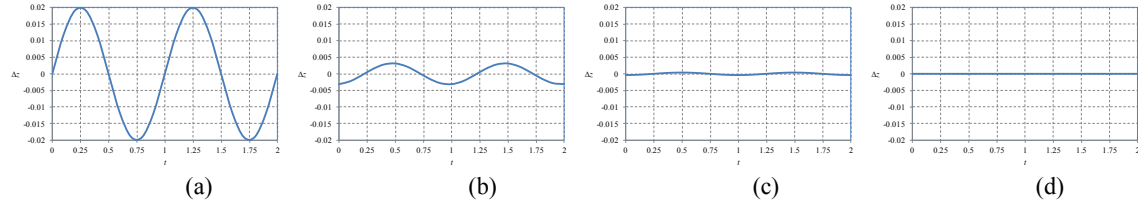
Gambar 7. Nilai Δz untuk berbagai densitas butiran ρ_b : (a) 200, (b) 300, (c) 400, (d) 500, (e) 600, (f) 700, (g) 800, (h) 900 kg/m^3 , dengan $\tau \approx 0$.

Upaya untuk mengubah nilai τ akan tetapi hanya memperbesar nilai Δz sebagaimana diilustrasikan dalam Gambar 8 untuk $\rho_b = 200 \text{ kg/m}^3$.



Gambar 8. Nilai Δz dengan densitas butiran $\rho_b = 200 \text{ kg/m}^3$, dengan τ/π : (a) 0, (b) 0.01, (c) 0.05, dan (d) 0.1.

Untuk saat ini dapat disimpulkan bahwa gerak butiran telah mengikuti gerak permukaan fluida, walaupun $\Delta z \neq 0$ akan tetapi Δz yang bernilai kecil hanya dapat diperoleh bila $\tau = 0$. Pengaruh $\tau = 2\pi t/\phi$ diberikan oleh Gambar 9 untuk berbagai nilainya dan nilai 0 memberikan hasil yang paling baik, walaupun tidak demikian dalam Gambar 8(a) karena terdapat faktor lain yang belum diketahui.



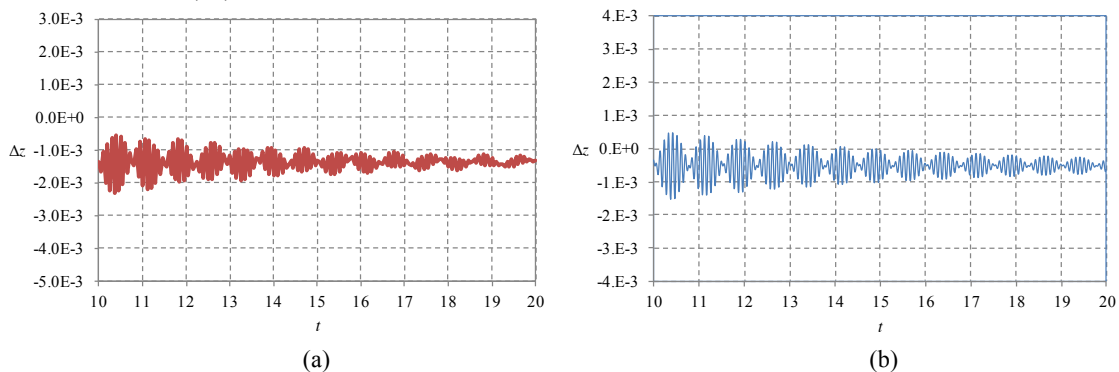
Gambar 9. Nilai Δz untuk fungsi $z_f(t) = A \sin(2\pi t/T)$ dan $z(t) = A \sin(2\pi t/T + \phi)$ dengan $A = 0.02$ m, $T = 1$ s, untuk berbagai nilai τ/π : (a) 1, (b) 0.1, (c) 0.01, dan (d) 0.001.

Untuk memperoleh fungsi Δz yang mirip dengan hasil eksperimen telah dibuat suatu fungsi dengan bentuk

$$\Delta z = [z_f - z(t - \tau)] e^{-\alpha(t - T_{rel})} + \delta, \tag{27}$$

dengan $\tau = 29.92$ s, $\delta = -5 \times 10^{-4}$ m, dan $\alpha = 0.15 \text{ s}^{-1}$, $T_{rel} = 10$ s dan z_f seperti dalam Persamaan (26). Hasil yang diperoleh diberikan dalam Gambar 10 untuk $\rho_b = 300 \text{ kg/m}^3$. Hanya sayangnya bentuk persamaan ini belum dapat dijelaskan dari mana datangnya dan mengapa bentuk seperti itu yang dipilih. Dan untuk densitas butiran ρ_b yang lain belum tentu akan diperoleh kemiripan seperti itu.

Dari Gambar 4 dan 5 diperoleh bahwa $z_{avg} = 1.38 \times 10^{-3}$ m yang tidak cocok dengan nilai δ yang digunakan dalam Persamaan (27).



Gambar 10. Nilai Δz dengan densitas butiran $\rho_b = 300 \text{ kg/m}^3$, untuk: (a) hasil simulasi dan (b) bila dimodelkan dengan Persamaan (27).

Dengan demikian prediksi bahwa $\tau = \tau(\rho_b)$ tidak terbukti secara eksplisit karena dalam Persamaan (27) masih terdapat suku-suku lain yang belum dapat dijelaskan seperti makna α dan δ .

KESIMPULAN

Simulasi sistem butiran berbentuk bola yang terapung pada permukaan fluida yang sedang berosilasi telah dilakukan. Terlihat bahwa dengan bertambahnya waktu gerak vertikal butiran $z(t + \tau)$ semakin mendekati gerak vertikal permukaan fluida $z_f(t)$ dengan waktu tunda τ dan dua faktor tambahan yang belum diketahui, yaitu faktor disipasi α dan pergeseran pusat osilasi δ yang tidak sama dengan ketinggian rata-rata butiran z_{avg} saat kesetimbangannya. Diperoleh bahwa $\tau = 29.92$ s, $\delta = -5 \times 10^{-4}$ m, dan $\alpha = 0.15 \text{ s}^{-1}$, apabila digunakan nilai $T_{rel} = 10$ s dan $z(0) = z_{avg}^f[\rho_b, z(0)]$.

UCAPAN TERIMA KASIH

Penulis mengucapkan terima kasih kepada Kemenristedikti atas dukungan finansialnya pada penelitian ini dalam tahun 2018.

REFERENSI

1. CJ Garrison 1975 *J. Hydronautics* **9** 58.
2. T Haveloc 1955 *Proc. Royal Soc. Lond. Series A, Math. Phys. Sci.* **231** 1.
3. EN Harvey 1931 *Biol. Bull.* **61** 273.
4. D Vella, L Mahadevan 2005 *Am. J. Phys.* **73** 817.
5. MV Berry, JV Hajnal 1983 *Opt. Acta* **30** 23.
6. YR Choi, SY Hong, HS Choi 2000 *Ocean Eng.* **28** 117.
7. R Barakat 1962 *J. Fluid Mech.* **13** 540.
8. D Vella, D-G Lee, H-Y Kim 2006 *Langmuir* **22** 5979.
9. "Viscosity of Water", A Paar GmbH, 2018, URL <https://wiki.anton-paar.com/en/water/> [20180604].