Definisi Massa Hawking Bermuatan untuk Dimensi Tinggi

Agri Faturahman[1,a)], Fiki Taufik Akbar[1,b)], dan Bobby Eka Gunara[1,c)]

[1]Laboratorium Fisika Teoretik,
Kelompok Keilmuan Fisika Teoretik Energi Tinggi dan Instrumentasi,
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Institut Teknologi Bandung,
Jl. Ganesha no. 10 Bandung, Indonesia, 40132

[a)] agri.faturahman@gmail.com (corresponding author)
[b)] ftakbar@fi.itb.ac.id
[c)] bobby@fi.itb.ac.id

Abstrak

Massa Hawking merupakan salah satu bentuk massa kuasi lokal yang banyak dimodifikasi untuk berbagai tujuan. Salah satunya adalah modifikasi massa Hawking bermuatan untuk membuktikan ketidaksamaan tipe Penrose. Dalam makalah ini akan ditinjau modifikasi massa Hawking bermuatan tersebut untuk dimensi tinggi. Selanjutnya, dalam makalah ini juga dibuktikan bahwa definisi massa Hawking bermuatan untuk dimensi tinggi memenuhi syarat limit massa kuasi lokal di tak hingga sama dengan massa ADM. Syarat limit massa kuasi lokal di tak hingga ini berlaku untuk metrik Schwarzschild-Tangherlini dan metrik Reisnerr-Nordstrom-Tangherlini.

Kata-kata kunci: Hypersphere, massa kuasi lokal, massa ADM, mean curvature, metrik

PENDAHULUAN

Massa merupakan suatu konsep yang sangat mendasar dalam fisika. Massa memegang peranan penting baik dalam fisika klasik maupun fisika modern. Sementara itu dalam teori relativitas umum, konsep massa lebih kompleks daripada konsep massa yang ada pada teori relativitas khusus. Salah satu definisi massa yang sering digunakan dalam teori relativitas umum adalah definisi massa untuk ruang waktu asimptotik datar (*asymptotically flat spacetime*) yang dikenal sebagai massa ADM (Arnowitt-Desser-Misner). Walaupun massa ADM dapat digunakan sebagai definisi massa total, namun definisi ini tidak memberikan karakterisasi yang cukup tepat untuk sistem nyata, karena untuk sistem nyata daerah ruangwaktu yang ditinjau hanya mencakup daerah tertentu saja. Oleh karena itu digunakan metode lain untuk mendefinisikan massa dalam teori relativitas umum, salah satunya yaitu definisi massa secara kuasi lokal.

Definisi massa secara kuasi lokal, atau “seolah-olah” lokal, merupakan salah satu kandidat untuk mendefinisikan massa dalam teori relativitas umum. Massa kuasi lokal adalah massa yang didefinisikan pada daerah lokal atau spesifik di dalam ruangwaktu. Ada beberapa sifat penting yang harus dipenuhi oleh suatu definisi massa kuasi lokal. Salah satu diantaranya adalah dalam ruangwaktu asimptotik datar, dengan koordinat radial, ketika $r \to \infty$ maka massa kuasi lokal tersebut harus sama besar dengan massa ADM.

Sampai saat ini, belum ada definisi sempurna dari massa kuasi lokal. Terdapat berbagai macam definisi massa kuasi lokal yang telah diajukan. Namun, definisi massa kuasi lokal tersebut, hingga saat ini, memiliki kekurangan dan kelebihannya masing-masing. Salah satu massa kuasi lokal yang paling populer adalah massa Hawking. Massa Hawking diperkenalkan pertama kali oleh Stephen Hawking melalui tulisannya tentang radiasi gravitasi. Massa Hawking didefinisikan sebagai integral permukaan, yang diinterpretasikan sebagai massa yang dilingkupi oleh permukaan bola dua dimensi. Massa Hawking banyak digunakan, dimodifikasi bentuk dan perumusannya, untuk berbagai tujuan salah satunya adalah untuk membuktikan ketidaksamaan tipe Penrose, seperti dalam makalah [1] dan [2].

Dalam makalah ini akan dibahas salah satu modifikasi massa Hawking yang telah dilakukan oleh Disconzi [1] dalam makalahnya yang disebut sebagai massa Hawking bermuatan. Disconzi melakukan modifikasi massa Hawking ini untuk membuktikan teorema yang terkait dengan ketidaksamaan Penrose untuk lubang hitam bermuatan. Selanjutnya, dengan menggunakan cara yang telah dilakukan oleh Disconzi, penulis akan mencari bentuk definisi baru massa Hawking bermuatan dengan memperumumnya untuk dimensi tinggi. Kemudian akan dibuktikan definisi massa Hawking bermuataan di dimensi tinggi tersebut memenuhi salah satu sifat massa kuasi lokal yang penting, yaitu $\lim_{r\to\infty} m_{QL} = m_{ADM}$, pada metrik Schwarzschild-Tangherlini dan metrik RNT (Reisnerr-Nordstrom- Tangherlini).

DEFINISI MASSA HAWKING BERMUATAN DIMENSI TINGGI

Massa Hawking Bermuatan

Dalam makalahnya, Disconzi menurunkan definisi massa kuasilokal baru, modifikasi massa Hawking, untuk Einstein-Maxwell *system* yang memainkan peranan penting dalam membuktikan ketidaksamaan Penrose untuk lubang hitam bermuatan. Ide untuk menurunkan definisi massa Hawking tersebut adalah sebagai berikut. Pertama, tinjau elemen garis *spherically symmetric*:

$$\gamma = ds^2 + r^2(s)d\sigma^2 = \frac{1}{r_{,s}^2}dr^2 + r^2 d\sigma^2, \tag{1}$$

dengan $r_{,s} = \frac{dr}{ds}$ dan $d\sigma^2$ adalah metrik untuk permukaan bola dua dimensi ($\mathbb{S}^2$) yaitu $d\sigma^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2$. Sekarang ambil metrik pada saat $t = 0$ untuk ruangwaktu Reisnerr-Nordstrom yaitu

$$g_{RN} = \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{e^2}{r^2}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\sigma^2. \tag{2}$$

Dengan mentransformasikan persamaan (1) ke dalam bentuk persamaan (2) didapatkan

$$\frac{1}{r_{,s}^2} = \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{e^2}{r^2}\right)^{-1}. \tag{3}$$

Sehingga kita menemukan bahwa

$$M(s) = \frac{1}{2}r\left(1 + \frac{e^2}{r^2} - r_{,s}^2\right). \tag{4}$$

Karena kita menginginkan suatu bentuk ekspresi massa yang mirip dengan massa Hawking maka kita harus memunculkan variabel *mean curvature* dari suatu permukaan dua dimensi yang "ditanamkan" dalam ruang 3 dimensi. Bentuk persamaan (4) di atas dapat diganti dengan variabel-variabel lain. Oleh karena itu kita harus mencari hubungan antara *mean curvature* tersebut dengan variabel yang ada di dalam persamaan (4). Hal yang paling mungkin dalam kondisi ini adalah mencari nilai *mean curvature* dari permukaan bola dua dimensi, $\mathbb{S}^2$, kemudian mensubstitusikannya kembali pada persamaan (4). Nilai *mean curvature* dari elemen garis persamaan (1) dicari dengan menggunakan persamaan-persamaan berikut

$$H_{ij} = -g_{kl}\Gamma_{ij}^k n^l, \tag{5}$$

$$H = g^{ij}H_{ij}. \tag{6}$$

Dari hasil perhitungan, didapatkan nilai *mean curvature* dari elemen garis pada persamaan (1) adalah

$$H = \frac{2r_{,s}}{r}. \tag{7}$$

Kita tahu bahwa luas permukaan bola, $\mathbb{S}^2$,dengan jari-jari r memenuhi persamaan $|\partial B_r| = 4\pi r^2 = \int_{\partial B_r} r^2 d\sigma$. Selanjutnya dari hasil perhitungan diketahui hubungan antara variabel $r_{,s}$ dan variabel H adalah

$$r_{,S}^2 = \frac{1}{16\pi}\int_{\partial B_r} H^2\, d\sigma. \tag{8}$$

Sehingga dengan menggunakan persamaan (7) dan persamaan (8) kita dapat mengubah bentuk persamaan (4) menjadi bentuk

$$M(r) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{|\partial B_r|}{4\pi}}\left(1 + \frac{4\pi e^2}{|\partial B_r|} - \frac{1}{16\pi}\int_{\partial B_r} H^2\, d\sigma\right), \tag{9}$$

atau

$$M(r) = \sqrt{\frac{|\partial B_r|}{16\pi}}\left(1 + \frac{4\pi e^2}{|\partial B_r|} - \frac{1}{16\pi}\int_{\partial B_r} H^2\right). \tag{10}$$

Persamaan (10) ini yang memotivasi Disconzi untuk mendefinisikan bentuk massa Hawking bermuatan .

Definisi massa Hawking bermuatan. [1] *Diberikan initial data $(M, g, E\ )$ untuk persamaan Einstein-Maxwell dan permukaan tertutup 2 dimensi $S \subset M$, maka massa Hawking bermuatan didefinisikan*

$$M_{CH}(S) = \sqrt{\frac{|S|}{16\pi}}\left(1 + \frac{4\pi e^2}{|S|} - \frac{1}{16\pi}\int_S\ H^2\right). \tag{11}$$

Dimana H adalah mean curvature dari S dan $e = \frac{1}{4\pi}\int_S\ E^i v_i$,dengan v mrupakan unit normal yang menunjuk ke arah spatial infinity. Jika S melingkupi sebuah volume, maka e adalah total muatan yang terkandung di dalam S.

Mean Curvature* untuk *Hypersphere

Disconzi menggunakan definisi massa Hawking bermuatan, persamaan (10), untuk membuktikan ketidaksamaan Penrose pada lubang hitam bermuatan. Dalam makalah ini, cara yang digunakan oleh Disconzi tersebut akan dimodifikasi untuk mendefinisikan suatu bentuk massa Hawking bermuatan dalam dimensi tinggi. Namun sebelumnya, pada bagian ini akan dibahas cara memperoleh nilai *mean curvature* untuk *hypersphere*. Nilai *mean curvature* untuk *hypersphere* ini memainkan peran penting untuk mendefinisikan massa Hawking bermuatan untuk dimensi tinggi.

Tinjau asymptotically flat manifold $\mathcal{M}^n$ berdimensi n dengan elemen garis *spherically symmetric*

$$ds^2 = g_{ab}dx^a dx^b = \ A^2 dr^2 + \ B^2 d\Omega_{n-1}^2. \tag{12}$$

A dan B merupakan fungsi dari koordinat r saja, $A \equiv\ A(r)$, $B \equiv\ B(r)$, dan $d\Omega^2$ merupakan elemen garis dari permukaan bola $(n-1)$ dimensi, $\mathbb{S}^{(n-1)}$. Elemen garis dari permukaan bola $(n-1)$ dimensi dinyatakan oleh

$$d\Omega_{n-1}^2 = d\chi_2^2 + \sin^2\chi_2\ d\chi_3^2 + \sin^2\chi_2 \sin^2\chi_3\, d\chi_4^2 + \cdots + \prod_{k=2}^{n-1}\sin^2\chi_{k-1}\, d\,\chi_k^2\ , \tag{13}$$

dengan metrik

$$\hat{g}_{ij} = diag(1, \sin^2\chi_2\,, \sin^2\chi_2 \sin^2\chi_3\,, \dots., \prod_{k=2}^{n-1}\sin^2\chi_{k-1}). \tag{14}$$

Metrik pada persamaan (12) juga dapat dituliskan dalam bentuk

$$g_{ab} = \ A^2\delta_a^1\delta_b^1 + \ B^2\hat{g}_{ij}\delta_a^i\delta_b^j, \tag{15}$$

dengan $a, b = 1, \dots. n$; $i, j = 2, \dots. n$; $x^a = (r, x^i)$. Sedangkan nilai simbol Christoffel yang tidak nol untuk metrik, persamaan (12), adalah

$$\Gamma_{ij}^1 = \frac{B'B}{A^2}\hat{g}_{ij} \tag{16}$$

Dengan menggunakan persamaan (5) dapat dihitung tensor kurvatur ekstrinsik untuk $\mathbb{S}^{(n-1)}$, yang tertanam dalam *manifold* $\mathcal{M}^n$ dengan elemen garis *spherically symmetric* , persamaan (12), adalah

$$H_{ij} = \frac{BB'}{A}\hat{g}_{ij}. \tag{17}$$

Dari hasil perhitungan menggunakan persamaan (6) nilai H atau *mean curvature* untuk $\mathbb{S}^{(n-1)}$ adalah

$$H = \frac{B'}{BA}(n-1). \tag{18}$$

Jika kita menghitung nilai *mean curvature* untuk $n = 3$ menggunakan persamaan (18) dan metrik pada persamaan (1) maka hasil yang diperoleh akan sama dengan persamaan (7). Hal ini membuktikan bahwa rumusan nilai *mean curvature* untuk *hypersphere* di atas, persamaan (18), memang benar dan valid.

Massa Hawking Bermuatan pada Dimensi Tinggi ($\boldsymbol{M_{CH}}$)

Pada bagian ini kita akan mencoba untuk mendefinisikan suatu massa Hawking bermuatan pada dimensi tinggi dengan menggunakan cara yang dilakukan oleh Disconzi. Pertama definisikan sebuah elemen garis *hyperspherical* sebagai berikut

$$\gamma = ds^2 + r^2(s)d\sigma^2 = \frac{1}{r_{,s}^2}dr^2 + r^2 d\sigma_{n-1}^2, \tag{19}$$

dengan $r_{,s} = \frac{dr}{ds}$ dan

$$d\sigma_{n-1}^2 = d\chi_2^2 + \sin^2\chi_2\ d\chi_3^2 + \sin^2\chi_2 \sin^2\chi_3\, d\chi_4^2 + \cdots + \prod_{k=2}^{n-1} \sin^2\chi_{k-1}\, d\,\chi_k^2\ , \tag{20}$$

adalah metrik untuk $\mathbb{S}^{n-1}$. Sekarang tinjau metrik pada saat $t = 0$ untuk ruangwaktu Reisnerr-Nordstrom-Tangherlini,

$$g_{RNT} = \left(1 - \frac{2M}{r^{n-1}} + \frac{Q^2}{r^{2n-4}}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\sigma_{n-1}^2(2). \tag{21}$$

Dengan mentransformasikan persamaan (19) ke dalam persamaan (21) didapatkan bahwa

$$\frac{1}{r_{,s}^2} = \left(1 - \frac{2M}{r^{n-1}} + \frac{Q^2}{r^{2n-4}}\right)^{-1}. \tag{22}$$

Sehingga kita akan mendapatkan bentuk persamaan

$$M(s) = \frac{1}{2}r^{n-2}\left(1 + \frac{Q^2}{r^{2n-4}} - r_{,s}^2\right). \tag{23}$$

Sama dengan cara yang dilakukan oleh Disconzi, kita akan mencari hubungan antara variabel $r_{,s}$ pada persamaan (23) dengan nilai *mean curvature* , H ,dari $\mathbb{S}^{(n-1)}$. Dengan menggunakan persamaan (18) dan persamaan (19) didapatkan hubungan antara $r_{,s}$ dan H adalah

$$r_{,s}^2 = \frac{1}{\omega_{n-1}(n-1)^2 r^{n-3}} \int_{\partial B_r} H^2\, d\sigma. \tag{24}$$

Pada dimensi n luas permukaan bola $\mathbb{S}^{(n-1)}$ dengan jari-jari r memenuhi persamaan

$$|\partial B_r| = \omega_{n-1} r^{n-1}, \tag{25}$$

dengan ω_{n-1} merupakan suatu konstanta yang bergantung dengan dimensi, maka dengan menggunakan persamaan (24) dan persamaan (25), persamaan (23) dapat diubah menjadi bentuk

$$M(r) = \frac{1}{2}\left(\frac{|\partial B_r|}{\omega_{n-1}}\right)^{\frac{n-2}{n-1}}\left(1 + Q^2\left(\frac{\omega_{n-1}}{|\partial B_r|}\right)^{\frac{n-2}{n-1}} - \frac{1}{(|\partial B_r|)^{\frac{n-3}{n-1}}\omega_{n-1}^{\frac{2}{n-1}}(n-1)^2}\int_{\partial B_r} H^2\, d\sigma\right). \tag{26}$$

Sampai disini kita telah berhasil membuat bentuk persamaan sesuai dengan cara yang digunakan oleh Disconzi. Tetapi harus diingat bahwa massa Hawking bermuatan yang didefinisikan Disconzi, merupakan massa kuasilokal spesifik yang digunakan untuk membuktikan ketidaksamaan Penrose untuk lubang hitam bermuatan. Sehingga untuk memperumumnya di dimensi tinggi kita perlu sedikit memodifikasi persamaan (26) di atas. Bentuk modifikasi yang dilakukan adalah mengganti konstanta bernilai satu pada persamaan (26), suku pertama dalam kurung, dengan konstanta yang terkait dengan skalar kurvatur permukaan. Konstanta ini dinamakan sebagai konstanta yamabe, $\tilde{\mathcal{Y}}_{(\Sigma,g)}$. Sehingga definisi massa Hawking bermuatan untuk dimensi tinggi adalah

$$M_{CH}(\Sigma) = \frac{1}{2}\Re_\Sigma\left(\tilde{\mathcal{Y}}_{(\Sigma,g)} + \frac{Q^2}{\Re_\Sigma^2} - \frac{1}{\Re_\Sigma^{\frac{n-3}{n-2}}\omega_{n-1}(n-1)^2}\int_\Sigma H^2\, d\Sigma\right), \tag{27}$$

dengan $\Re_\Sigma = \left(\frac{|\Sigma|}{\omega_{n-1}}\right)^{\frac{n-2}{n-1}}$ dan $\tilde{\mathcal{Y}}_{(\Sigma,g)}$ adalah konstanta bergantung skalar kurvatur Σ. Konstanta $\tilde{\mathcal{Y}}_{(\Sigma,g)}$ akan bernilai satu apabila Σ merupakan $\mathbb{S}^{(\boldsymbol{n-1})}$.

NILAI LIMIT MASSA HAWKING BERMUATAN DIMENSI TINGGI, $\boldsymbol{M_{CH}}$, UNTUK $\boldsymbol{r \to \infty}$

Salah satu sifat penting yang harus dipenuhi oleh definisi massa kuasilokal, seperti massa Hawking, adalah dalam limit $r \to \infty$ massa kuasi lokal tersebut harus memenuhi syarat $\lim_{r\to\infty} m_{QL} = m_{ADM}$. Oleh karena itu kita harus menguji massa Hawking bermuatan untuk dimensi tinggi, M_{CH}, yang telah didefinisikan memenuhi syarat tersebut atau tidak. Dalam pengujian syarat ini akan digunakan dua metrik solusi lubang hitam dimensi tinggi, yaitu metrik Schwarzschild-Tangherlini dan metrik RNT (Reissner Nordstrom-Tangherlini).

$\boldsymbol{M_{CH}}$ untuk metrik Schwarzschild-Tangherlini

Tinjau metrik Schwarzschild-Tangherlini, dimensi $(n+1)$, yang dinyatakan dalam elemen garis

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2m}{r^{n-2}}\right)dt^2 + \left(1 - \frac{2m}{r^{n-2}}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega_{n-1}^2, \tag{28}$$

dengan $d\Omega^2$ merupakan elemen garis dari permukaan bola $(n-1)$ dimensi, $\mathbb{S}^{(n-1)}$. Sekarang tinjau suatu *hypersurface* Σ^n dari metrik Schwarzschild tersebut untuk setiap $t = konstan$ yang elemen garisnya dinyatakan oleh

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2m}{r^{n-2}}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega_{n-1}^2. \tag{29}$$

Selanjutnya kita akan menghitung M_{CH} metrik di atas, persamaan (29), kemudian menghitung $\lim_{r\to\infty} M_{CH}$. Dengan menggunakan persamaan (27) didapatkam M_{CH} untuk metrik Schwarzschild-Tangherlini adalah

$$M_{CH} = m + \frac{Q^2}{2r^{(n-2)}}. \tag{30}$$

Pada limit $r \to \infty$, M_{CH} memenuhi

$$\lim_{r\to\infty} M_{CH} = \lim_{r\to\infty}\left(m + \frac{Q^2}{2r^{(n-2)}}\right) = m = m_{ADM}. \tag{31}$$

Terbukti bahwa massa Hawking bermuatan di dimensi tinggi yang kita definisikan memenuhi syarat $\lim_{r\to\infty} m_{QL} = m_{ADM}$ untuk metrik Schwarzschild-Tangherlini.

$\boldsymbol{M_{CH}}$ untuk metrik RNT (Reissner-Nordstrom-Tangherlini)

Metrik RNT dinyatakan dalam elemen garis

$$ds^2 = -\left(1-\frac{2m}{r^{n-2}}+\frac{Q^2}{r^{2n-4}}\right)dt^2+\left(1-\frac{2m}{r^{n-2}}+\frac{Q^2}{r^{2n-4}}\right)^{-1}dr^2+r^2d\Omega_{n-1}^2. \quad (32)$$

Jika kita meninjau suatu *hypersurface* Σ^n dari metrik RNT tersebut untuk setiap $t = konstan$ maka elemen garisnya dapat dinyatakan dengan

$$ds^2 = \left(1-\frac{2m}{r^{n-2}}+\frac{Q^2}{r^{2n-4}}\right)^{-1}dr^2+r^2d\Omega_{n-1}^2. \quad (33)$$

Dengan menggunakan cara yang sama seperti sebelumnya, untuk metrik RNT didapatkan $M_{CH} = m$. Sehingga pada limit $r \to \infty$,

$$\lim_{r\to\infty} M_{CH} = \lim_{r\to\infty} m = m = m_{ADM}. \quad (34)$$

Massa Hawking bermuatan di dimensi tinggi yang kita definisikan juga memenuhi syarat $\lim_{r\to\infty} m_{QL} = m_{ADM}$ untuk metrik RNT.

KESIMPULAN

Metode yang digunakan oleh Disconzi dapat digunakan untuk mendefinisikan massa Hawking bermuatan dimensi tinggi. Modifikasi utama untuk mendefinisikan massa Hawking bermuatan dimensi tinggi ini terkait dengan perhitungan nilai *mean curvature* untuk *hypersphere*. Dengan menggunakan metrik Schwarzschild-Tangherlini dan metrik RNT, telah dibuktikan bahwa massa Hawking bermuatan di dimensi tinggi, M_{CH}, yang didefinisikan memenuhi syarat $\lim_{r\to\infty} m_{QL} = m_{ADM}$.

UCAPAN TERIMA KASIH

Penulis mengucapkan terima kasih kepada berbagai pihak yang telah membantu dalam penulisan makalah ini.

REFERENSI

1. M. M. Disconzi dan M. A. Khuri, *On the Penrose inequality for charged black holes*, Classical and Quantum Gravity 29.24 (2012) 245019, arXiv:1207.5484v2 [math.DG]
2. A.H. Hidayat, F. T. Akbar, dan B.E. Gunara, *Higher dimensional Penrose inequality in spherically symmetric spacetime*. Chinese Journal of Physics 54.4 (2016) 582-586.
3. L.L. de Lima, F. Girao, W. Lozorio, dan J. Silva, *Penrose inequalities and a positive mass theorem for charged black holes in higher dimensions*. Classical and Quantum Gravity 33.3 (2016) 035008, arXiv:1401.0945 [math.DG]
4. R.G. Cai dan K.S. Soh, *Topological black holes in the dimensionally continued gravity*. Physical Review D 59.4 (1999) 044013, arXiv:gr-qc/9808067v2