

Berry Curvature dalam Dinamika Adiabatik Sistem Kuantum

Mirda Prisma Wijayanto^{1,a)}, Andy Octavian Latief^{1,b)}, Bobby Eka Gunara^{1,2,c)}

¹Laboratorium Fisika Teoretik,
Kelompok Keilmuan Fisika Teoretik Energi Tinggi dan Instrumentasi,
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Institut Teknologi Bandung,
Jl. Ganesha no. 10 Bandung, Indonesia, 40132

²Indonesia Center for Theoretical and Mathematical Physics (ICTMP),
Jl. Ganesha no. 10 Bandung, Indonesia, 40132

^{a)} mirda.prisma.wijayanto@students.itb.ac.id (corresponding author)

^{b)} latief@fi.itb.ac.id

^{c)} bobby@fi.itb.ac.id

Abstrak

Proses evolusi keadaan suatu sistem baik klasik maupun kuantum disebabkan oleh interaksi antara sistem tersebut dengan lingkungan. Untuk interaksi yang bersifat adiabatik, maka evolusi keadaan sistem kuantum selain dideskripsikan oleh fasa dinamik juga dideskripsikan oleh fasa geometrik yang disebut Berry phase. Berry phase merupakan kuantitas fisis lokal yang invarian terhadap transformasi Gauge. Untuk menjamin invariansi, diperlukan suatu medan Gauge yang didefinisikan sebagai Berry curvature. Dalam penelitian ini dikaji efek Berry phase dan Berry curvature terhadap dinamika sistem kuantum diantaranya untuk dinamika spinor dalam medan magnet yang berotasi secara adiabatik dan dinamika elektron Bloch. Dalam meninjau dinamika elektron Bloch diperoleh bahwa nilai kecepatan transport elektron sebanding dengan nilai Berry curvature. Secara fisis dapat disimpulkan bahwa dinamika sistem tidak hanya dipengaruhi oleh gaya eksternal yang bekerja melainkan juga dipengaruhi oleh sifat geometri dari sistem tersebut.

Kata - kata kunci : Dinamika Adiabatik, Sistem Kuantum, Berry Phase, Berry Curvature.

PENDAHULUAN

Fasa geometrik secara umum didefinisikan sebagai perbedaan fasa yang dihasilkan oleh sifat geometris ruang parameter Hamiltonian [8] ketika suatu sistem baik klasik maupun kuantum mengalami evolusi dinamika sehingga parameter-parameter dalam ruang parameter tersebut berubah secara simultan baik perlahan (adiabatik) maupun non-adiabatik hingga akhirnya kembali ke konfigurasi awal setelah evolusi selesai. Kemunculan fasa geometrik berawal dari penelitian oleh Pancharatnam pada tahun 1956 [20] tentang fenomena interferensi dari cahaya terpolarisasi. Dalam penelitian tersebut dijelaskan bahwa dua keadaan non-ortogonal dari polarisasi dapat berada pada satu fasa apabila intensitas dari superposisi keadaan mencapai nilai maksimum. Kemudian pada tahun 1958, Higgins [5] mengkaji tingkat energi vibronik dari molekul nonlinier simetris dalam keadaan elektronis terdegenerasi rangkap dua dan diperoleh hasil bahwa transisi dari keadaan vibronik ke keadaan elektronis non-degenerasi memungkinkan perubahan energi getaran dari jumlah integral kuantum. Dalam meninjau transisi, Higgins *et al* menggunakan fasa tambahan selain fasa dinamik yang selanjutnya didefinisikan sebagai fasa geometrik.

Pada tahun 1979 Mead dan Truhlar meninjau evolusi siklik keadaan kuantum dengan menggunakan pendekatan Born-Oppenheimer [3]. Akan tetapi dalam penelitian tersebut, fasa tambahan diabaikan. Menurut

Berry dalam penelitiannya tahun 1984 tentang evolusi siklik keadaan kuantum dengan menggunakan pendekatan adiabatik fasa tambahan tidak dapat diabaikan [14]. Selanjutnya fasa tambahan tersebut disebut sebagai fasa Berry atau Berry phase. Fasa Berry bersifat nonintegrable dan bersifat gauge invariant sehingga tidak dapat diabaikan dalam perhitungan transisi fasa pada evolusi siklik sistem kuantum. Penemuan fasa Berry kemudian menjadi awal perkembangan fasa geometrik yang banyak digunakan untuk menjelaskan fenomena transisi fasa sistem kuantum secara adiabatik.

Pada tahun 1987, Aharonov dan Anandan memberikan generalisasi terhadap fasa Berry. Dalam penelitian tersebut, Aharonov dan Anandan meninjau kasus evolusi siklik yang tidak hanya terbatas pada kondisi adiabatik [21]. Penelitian tersebut didasarkan oleh fakta bahwa kondisi adiabatik pada fasa Berry tidak pernah secara eksak ditemukan dalam sistem kuantum yang nyata dan hanya berupa sebuah metode aproksimasi teoritis. Hal ini juga yang mendasarkan Berry untuk melakukan penelitian lanjutan tentang koreksi adiabatik terhadap penelitian sebelumnya [15]. Aharonov dan Anandan menjelaskan evolusi siklik dari Hamiltonian sistem kuantum tanpa perlu melakukan spesifikasi terhadap ruang parameter melainkan cukup hanya meninjau *Projective Hilbert Space* [1]. Parameter R dapat berupa kuantitas sembarang yang mungkin berubah-ubah terhadap waktu sehingga berlaku $R(t) \neq R(0)$. Dalam penelitian tersebut dihasilkan faktor fasa tambahan yang selanjutnya disebut sebagai fasa Aharonov-Anandan. Secara umum dapat disimpulkan bahwa fasa Berry merupakan bentuk khusus dari fasa Aharonov-Anandan. Masih sangat banyak penelitian lebih lanjut mengenai fasa geometrik dan aplikasinya dalam evolusi dinamika sistem kuantum. Dalam penelitian ini hanya dibatasi tinjauan dinamika secara adiabatik dengan menggunakan fasa Berry. Sebagai pengembangan akan dihitung pengaruh *Berry phase* dan *Berry curvature* terhadap beberapa fenomena dinamika sistem kuantum diantara dinamika spinor dalam medan magnet yang berotasi, dinamika elektron Bloch (sistem kristal) akibat interaksi medan listrik eksternal, dan terakhir akan dijabarkan formulasi non-abelian *Berry curvature* untuk meninjau sistem - sistem dengan energi eigen yang berdegenerasi dengan spektrum energi eigen yang kontinu.

DINAMIKA ADIABATIK SISTEM KUANTUM

Dalam mekanika kuantum, suatu sistem fisis dapat terdiri dari berhingga atau tak berhingga state vector dalam ruang Hilbert H beserta seperangkat operator linear yang bekerja pada state vector tersebut. Operator linier dapat diinterpretasikan sebagai suatu observable kuantum. Untuk sistem kuantum yang berinteraksi dengan lingkungan, maka observable dideskripsikan oleh operator yang bergantung pada suatu parameter tertentu $R = (R^1, R^2, \dots, R^n)$. Apabila konfigurasi sistem-lingkungan yang saling berinteraksi berubah terhadap waktu, maka dapat dideskripsikan suatu parameter yang bergantung waktu $R = R(t)$ [1].

Proses interaksi dapat menyebabkan suatu sistem kuantum mengalami transisi keadaan yang disebut sebagai evolusi dinamika kuantum. Untuk sembarang keadaan yang berevolusi dimana parameter R berubah secara periodik maka keadaan tersebut disebut sebagai keadaan siklik, dan proses dinamika yang bersangkutan disebut sebagai evolusi siklik. Suatu proses dinamika sistem kuantum dimana parameter R berubah secara perlahan (lambat) disebut dinamika adiabatik atau evolusi siklik adiabatik.

Evolusi dinamika sistem kuantum akibat interaksi dapat dijelaskan dengan menggunakan pendekatan teori gangguan bergantung waktu. Keadaan sebelum gangguan (pada saat t_0) didefinisikan oleh persamaan Schrödinger :

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\mathbf{r}, t\rangle = H(R(t)) |\mathbf{r}, t\rangle \quad (1)$$

atau dapat dijabarkan dalam bentuk,

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\mathbf{r}, t\rangle = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 |\mathbf{r}, t\rangle + V |\mathbf{r}, t\rangle. \quad (2)$$

Secara umum potensial V merupakan fungsi dari posisi dan waktu didefinisikan sebagai $V = V(\mathbf{r}, t)$. Apabila potensial tidak bergantung waktu $V \neq V(\mathbf{r}, t)$ atau $V = V(\mathbf{r})$ maka solusi dari persamaan Schrödinger adalah keadaan stasioner yang bersifat separable antara bagian spasial (ruang) dan waktu. Dapat dituliskan sebagai berikut,

$$|\psi_n(\mathbf{r}, t)\rangle = e^{-i\frac{E_n t}{\hbar}} |\phi_n(\mathbf{r})\rangle \quad (3)$$

dimana $|\psi_n(\mathbf{r}, t)\rangle$ menyatakan keadaan eigen ke- n pada saat t yang memenuhi persamaan eigen,

$$H(R(t)) |\psi_n(\mathbf{r}, t)\rangle = E_n |\psi_n(\mathbf{r}, t)\rangle \quad (4)$$

dengan nilai eigen E_n . dimana Hamiltonian memiliki spektrum diskrit, sehingga tidak terdapat degenerasi terhadap nilai eigen. Untuk sistem dengan spektrum energi kontinu dapat dilihat pada Newton (1994) [18].

Apabila Hamiltonian tidak bergantung waktu maka nilai eigen E_n merupakan suatu kuantitas kekal yang didefinisikan sebagai energi. Namun apabila Hamiltonian bergantung waktu maka nilai eigen E_n didefinisikan sebagai suatu fungsi bergantung waktu $E_n(R(t))$.

Setelah diberikan gangguan atau interaksi (pada saat $t > t_0$) maka keadaan sistem menjadi keadaan non-stasioner yang bersifat non-separable. Dapat dituliskan sebagai berikut,

$$|\psi_n(\mathbf{r}, t)\rangle = \sum_n C_n(R(t)) e^{i\zeta_n(R(t))} |\psi_n(\mathbf{r}, t_0)\rangle = \sum_n C_n(R(t)) e^{-\frac{i}{\hbar} \int_0^t E_n(R(t')) dt'} |\psi_n(\mathbf{r}, t_0)\rangle \quad (5)$$

dimana $\zeta_n(R(t)) = -\frac{1}{\hbar} \int_0^t E_n(R(t')) dt'$ merupakan fasa dinamik yang mendeskripsikan evolusi sistem dengan parameter R yang berubah terhadap waktu $R = R(t)$. Selanjutnya $|\psi_n(\mathbf{r}, t_0)\rangle = |\psi_n\rangle$ dapat didefinisikan sebagai keadaan awal dari sistem pada saat t_0 sebelum diberikan gangguan.

Dalam penelitian ini ditinjau kasus evolusi sistem kuantum yang bersifat adiabatik, dimana memenuhi [2]

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{dH}{dt} = \lim_{t \rightarrow \infty} \dot{H} = 0. \quad (6)$$

Apresiasi adiabatik secara fisis menjelaskan bahwa jika gangguan terhadap sistem diberikan dalam waktu yang lama $t \rightarrow \infty$, sehingga menyebabkan parameter R berubah secara perlahan, maka Hamiltonian sistem tidak akan mengalami perubahan yang berarti. Kondisi ini menyebabkan sistem tidak mengalami perubahan keadaan setelah proses evolusi berlangsung, sesuai dengan teorema adiabatik yang menyatakan bahwa [10, 12, 16, 19]: *apabila partikel pada awalnya berada pada keadaan eigen ke- n dari $H(0)$ saat t_0 , maka partikel tersebut akan tetap berada pada keadaan eigen ke- n untuk $H(t)$ pada saat $t > t_0$.*

Untuk mendefinisikan keadaan sistem setelah gangguan, akan ditentukan $C_n(R(t))$ dari persamaan (5). Substitusi persamaan (5) kedalam persamaan Schrödinger (2), kemudian digunakan teori perturbasi dengan menerapkan kondisi (6) sehingga diperoleh,

$$C_m(R(t)) = C_m(0) e^{i\gamma_m(R(t))} \quad (7)$$

untuk orde nol, diperoleh, $C_m(0) = 1$ untuk $m = n$ dan $C_m(0) = 0$ untuk $m \neq n$. Untuk menghindari solusi trivial digunakan $m = n$ sehingga diperoleh $\gamma_m(R(t)) = \gamma_n(R(t))$ dalam bentuk,

$$\gamma_n(R(t)) = i \left\langle \psi_n(R(t)) \left| \frac{\partial}{\partial t} \psi_n(R(t)) \right. \right\rangle dt \quad (8)$$

Selanjutnya substitusi persamaan (7) dan (8) kedalam persamaan (5) menghasilkan,

$$|\psi_n(\mathbf{r}, t)\rangle = e^{i\zeta_n(R(t))} e^{i\gamma_n(R(t))} |\psi_n(\mathbf{r}, t_0)\rangle \quad (9)$$

dengan,

$$\zeta_n(R(t)) = -\frac{1}{\hbar} \int_0^t E_n(R(t')) dt' \quad (10)$$

Untuk dinamika sistem kuantum yang bersifat adiabatik, evolusi keadaan selain didefinisikan oleh fasa dinamik $\zeta_n(R(t))$ juga didefinisikan oleh fasa geometrik $\gamma_n(R(t))$ yang disebut sebagai Berry Phase, pertama kali ditemukan oleh Berry (1984). Dapat dilihat pada persamaan (9) bahwa kondisi adiabatik menjamin bahwa setelah proses evolusi dimana $t > t_0$ sistem kembali menjadi keadaan stasioner.

Selanjutnya didefinisikan basis $\{|n(R)\rangle\}$ yang menyatakan suatu keadaan kuantum pada keadaan eigen ke- n dengan parameter interaksi R . Dengan menggunakan basis tersebut, Berry Phase dapat dituliskan kembali dalam bentuk

$$\gamma_n = i \left\langle n(R) \left| \frac{\partial}{\partial t} n(R) \right. \right\rangle dt = i \int_{R(0)}^{R(t)} \left\langle n(R) \left| \frac{\partial}{\partial R} n(R) \right. \right\rangle dR \quad (11)$$

dengan,

$$\frac{\partial n(R)}{\partial t} = \frac{\partial n(R)}{\partial R} \frac{\partial R}{\partial t} = \frac{\partial n(R)}{\partial R_1} \frac{\partial R_1}{\partial t} + \frac{\partial n(R)}{\partial R_2} \frac{\partial R_2}{\partial t} + \dots + \frac{\partial n(R)}{\partial R_N} \frac{\partial R_N}{\partial t} = (\nabla_R n(R)) \cdot \frac{d\mathbf{R}}{dt} \quad (12)$$

Persamaan (12) dapat dituliskan kembali dalam bentuk,

$$\gamma_n = \int_{R(0)}^{R(t)} A_n(R) dR \quad (13)$$

dimana,

$$A_n(R) = i \left\langle n(R) \left| \frac{\partial}{\partial R} n(R) \right. \right\rangle = i \langle n(R) | \nabla_R n(R) \rangle \quad (14)$$

Selanjutnya $A_n(R)$ didefinisikan sebagai vektor potensial Berry atau *Berry connection*. Dalam bentuk diferensial lokal one-form, Berry connection dapat dituliskan sebagai,

$$A^n = A_\mu^n dR^\mu = i \left\langle n(R) \left| \frac{\partial}{\partial R^\mu} n(R) \right. \right\rangle dR^\mu = i \langle n(R) | d | n(R) \rangle \quad (15)$$

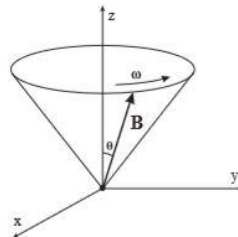
Bentuk diferensial dR^μ dengan $\mu = 1, 2, \dots, M = \dim(M)$ merupakan basis diferensial one-form dan d disebut sebagai exterior derivative operator. One-form A^n disebut sebagai Berry one-form connection. Hubungan antara A^n dengan $\gamma_n(t)$ adalah sebagai berikut

$$\gamma_n = \int_{R(0)}^{R(t)} i \langle n(R) | d | n(R) \rangle = \int_C A^n \quad (16)$$

dimana C merupakan kurva yang menghubungkan R ke manifold M [4, 13].

DINAMIKA SPINOR PADA MEDAN MAGNET BEROTASI

Berikut akan diuraikan salah satu aplikasi Berry phase dalam dinamika sistem kuantum. Tinjau partikel spin- $\frac{1}{2}$ dalam medan magnet eksternal \mathbf{B} yang berotasi secara adiabatik dengan sudut θ disekitar sumbu- z .



Gambar 1. Lintasan gerak partikel spinor dalam medan magnet eksternal \mathbf{B}

Medan magnet dapat didefinisikan sebagai berikut :

$$\mathbf{B}(t) = B_0 \begin{pmatrix} \sin \theta \cos(\omega t) \\ \sin \theta \sin(\omega t) \\ \cos \theta \end{pmatrix} \quad (17)$$

dimana ω merupakan frekuensi angular rotasi dan $B_0 = |\mathbf{B}(t)|$ merupakan suatu nilai konstan. Selanjutnya $\mathbf{B}(t)$ dideskripsikan sebagai parameter yang diubah selama mekanisme interaksi antara sistem dengan lingkungan. Ketika medan magnet berotasi secara perlahan (adiabatik) maka spin partikel akan mengikuti arah medan magnet. Keadaan eigen setelah menempuh periode T didefinisikan sebagai $H(t)$. Dalam kerangka acuan yang diam (rest frame) dapat dituliskan,

$$H(t) = \mu \mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\sigma} = \mu B_0 \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \theta & \sin \theta e^{-i\omega t} \\ \sin \theta e^{i\omega t} & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (18)$$

dimana, $\mu = \frac{e}{2m} \hbar$.

Selanjutnya didefinisikan state vector $|n(t)\rangle$ yang memenuhi persamaan nilai eigen :

$$H(t) |n(t)\rangle = E_n |n(t)\rangle \quad (19)$$

Substitusi $H(t)$ dari persamaan (18) kedalam persamaan (19), kemudian lakukan diagonalisasi sehingga diperoleh eigenstates ternormalisasi,

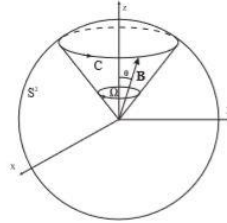
$$|n_+(t)\rangle = \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} \\ \sin \frac{\theta}{2} e^{i\omega t} \end{pmatrix} \quad (20)$$

$$|n_{\pm}(t)\rangle = \begin{pmatrix} -\sin \frac{\theta}{2} \\ \cos \frac{\theta}{2} e^{i\omega t} \end{pmatrix} \quad (21)$$

dengan nilai eigen yang bersesuaian yaitu,

$$E_{\pm} = \pm \mu B_0 \quad (22)$$

Persamaan (20) dan (21) masing-masing diinterpretasikan sebagai *spin up* $|n_{+}(t)\rangle = |{}^0_{\mathbf{B}(t)}\rangle$ dan *spin down* $|n_{-}(t)\rangle = |{}^1_{\mathbf{B}(t)}\rangle$ sepanjang arah $\mathbf{B}(t)$. Ruang parameter dapat dianalogikan sebagai nilai - nilai $\mathbf{B}(t)$ sepanjang kurva tertutup dan membentuk representasi bola S^2 seperti gambar berikut,



Gambar 2. Ruang parameter $\mathbf{B}(t)$ berbentuk S^2

Gradien dalam ruang parameter yang dideskripsikan oleh S^2 dapat dituliskan sebagai,

$$\nabla |n_{\pm}(t)\rangle = \frac{\partial}{\partial r} |n_{\pm}(t)\rangle \hat{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} |n_{\pm}(t)\rangle \hat{\theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} |n_{\pm}(t)\rangle \hat{\phi}. \quad (23)$$

Dengan demikian, untuk bagian *spin up* dapat diperoleh

$$\langle n_{+} | \nabla_{\theta} | n_{+} \rangle = 0, \quad (24)$$

$$\langle n_{+} | \nabla_{\phi} | n_{+} \rangle = i \frac{\sin^2 \left(\frac{\theta}{2} \right)}{B_0 \sin \theta}. \quad (25)$$

Sedangkan untuk bagian *spin down* dapat diperoleh

$$\langle n_{-} | \nabla_{\theta} | n_{-} \rangle = 0, \quad (26)$$

$$\langle n_{-} | \nabla_{\phi} | n_{-} \rangle = i \frac{\cos^2 \left(\frac{\theta}{2} \right)}{B_0 \sin \theta}. \quad (27)$$

Selanjutnya dihitung *Berry connection* yang didefinisikan oleh $A^n = A_{\mu}^n dR^{\mu}$. Untuk *spin up* dapat diperoleh $A_{\theta}^{+} = 0$ dan $A_{\phi}^{+} = -\sin^2 \left(\frac{\theta}{2} \right)$. Sedangkan untuk *spin down* dapat diperoleh $A_{\theta}^{-} = 0$ dan $A_{\phi}^{-} = -\cos^2 \left(\frac{\theta}{2} \right)$.

Selanjutnya dihitung *Berry curvature*. Untuk *spin up* diperoleh $\Omega_{\theta\phi}^{+} = \partial_{\theta} A_{\phi}^{+} - \partial_{\phi} A_{\theta}^{+} = -\frac{1}{2} \sin \theta$. Sedangkan untuk *spin down* dapat diperoleh $\Omega_{\theta\phi}^{-} = \partial_{\theta} A_{\phi}^{-} - \partial_{\phi} A_{\theta}^{-} = \frac{1}{2} \sin \theta$. Sehingga *Berry curvature* total dari sistem

adalah $\Omega_{\theta\phi} = \Omega_{\theta\phi}^{+} + \Omega_{\theta\phi}^{-} = -\frac{1}{2} \sin \theta + \frac{1}{2} \sin \theta = 0$. Karena *Berry curvature* sama dengan nol, maka secara fisis dapat disimpulkan bahwa sistem spinor tersebut memiliki simetri baik *T-Symmetry* maupun *I-Symmetry*.

Selanjutnya dapat pula ditentukan *Berry phase*. Untuk komponen spin up dan spin down masing-masing dapat diuraikan menjadi

$$\gamma_{+} = \oint_0^{2\pi} A^{+} = -\oint_0^{2\pi} \sin^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) d\theta = -\oint_0^P 2\pi \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos \theta \right) d\theta = -\pi, \quad (28)$$

$$\gamma_{-} = \oint_0^{2\pi} A^{-} = -\oint_0^{2\pi} \cos^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) d\theta = -\oint_0^P 2\pi \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos \theta \right) d\theta = -\pi. \quad (29)$$

Sehingga Berry phase total dari sistem adalah $\gamma_{\pm} = \gamma_{+} + \gamma_{-} = -2\pi$. Dapat dilihat bahwa Berry phase bernilai kelipatan dari 2π dengan faktor skala -1, artinya medan medan dirotasikan berlawanan dengan arah jarum jam, dapat dilihat pada gambar 3.1.

DINAMIKA ELEKTRON BLOCH

Berikut akan diuraikan efek Berry phase dan Berry curvature untuk menjelaskan fenomena transport elektron akibat gangguan yang bersifat adiabatik. Fenomena transport elektron merupakan salah satu topik yang banyak diteliti dalam bidang fisika material terkondensasi. Beberapa penelitian terdahulu diantaranya adalah Thouless *et al* (1983) yang menjelaskan bahwa jika potensial berubah secara perlahan terhadap waktu dan kembali ke bentuk semula setelah waktu tertentu, maka transport partikel dalam siklus waktu tersebut dapat dinyatakan sebagai nilai Berry phase dan merupakan bilangan bulat [6]. Selanjutnya Niu dan Thouless (1985) menjelaskan bahwa untuk sistem banyak partikel yang saling berinteraksi dan tidak teratur, sebagian besar energi Fermi selalu terletak pada energi gap (celah energi) selama siklus interaksi berlangsung [17]. Penelitian lebih lanjut dilakukan oleh Avron dan Seiler (1985) terkait transport adiabatik pada *multiple connected systems* [7].

Fenomena Transport Adiabatik Elektron Bloch

Berikut akan dijabarkan perumusan arus dan kecepatan transport elektron secara adiabatik oleh gangguan dalam bentuk umum sebagai fungsi waktu. Sebagai penyederhaan ditinjau sistem berupa pita insulator 1-dimensi yang berubah secara perlahan terhadap perturbasi bergantung waktu. Diasumsikan gangguan yang diberikan bersifat periodik dimana Hamiltonian memenuhi persamaan,

$$H(t+T) = H(t) . \quad (30)$$

dengan T merupakan periode. Karena $H(t)$ masih memiliki simetri translasi, maka keadaan eigen dapat dinyatakan sebagai fungsi gelombang Bloch (dimisalkan dalam arah sumbu- x)

$$|\psi_{n\mathbf{q}}(\mathbf{r})\rangle = e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} |U_n(\mathbf{q}, t)\rangle . \quad (31)$$

Selanjutnya digunakan representasi dalam ruang momentum \mathbf{q} dengan Hamiltonian $H(\mathbf{q}, t)$ yang didefinisikan dalam bentuk [7]

$$H(\mathbf{q}, t) = \frac{(\hat{P} + \hbar\mathbf{q})^2}{2m} + V(\mathbf{r}) . \quad (32)$$

Digunakan basis $\{|U_n(\mathbf{q}, t)\rangle\}$ yang memenuhi kondisi periodik $U_n(\mathbf{q} + \mathbf{a}) = U_n(\mathbf{q})$.

Selanjutnya akan dicari arus adiabatik yang diinduksi oleh variasi potensial eksternal. Untuk menyelesaikan kasus tersebut dapat digunakan teori perturbasi. Diasumsikan bahwa sebelum diberikan variasi potensial eksternal. Hamiltonian sistem tidak bergantung waktu sehingga keadaan sistem merupakan keadaan stasioner. Setelah diberikan gangguan, maka Hamiltonian sistem dapat dituliskan menjadi

$$\hat{H}(\mathbf{q}, t) = \frac{(\hat{P} + \hbar\mathbf{q})^2}{2m} + \lambda V(\mathbf{r}, t) . \quad (33)$$

dengan gangguan umum yang didefinisikan oleh $V = i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$. Persamaan eigen dapat dituliskan,

$$(H_0 + \lambda V)|U_n\rangle = E_n |U_n\rangle . \quad (34)$$

Dengan menggunakan teori perturbasi dapat diperoleh $|U_n\rangle$ hingga koreksi orde-1,

$$|U_n\rangle = |n\rangle - \sum_{m \neq n} i\hbar \frac{\langle m | \frac{\partial}{\partial t} | n \rangle}{\epsilon_m - \epsilon_n} |m\rangle . \quad (35)$$

Dengan demikian, fungsi gelombang Bloch (hingga orde-1) dapat dituliskan kembali dalam bentuk

$$|\psi_{n\mathbf{q}}(x)\rangle = e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} \left(|n\rangle - \sum_{m \neq n} i\hbar \frac{\langle m | \frac{\partial}{\partial t} | n \rangle}{E_m^{(0)} - E_n^{(0)}} |m\rangle \right) . \quad (36)$$

Salah satu parameter dalam fenomena transport adalah kecepatan transport. Kecepatan transport mendeskripsikan kecepatan dinamika gerak elektron yang nantinya akan menghasilkan arus induksi. Terlebih dahulu akan dijabarkan formula untuk memperoleh kecepatan transport. Tinjau kembali Hamiltonian sistem

dalam representasi ruang momentum \mathbf{q} pada persamaan (32). Dimisalkan $u = \hat{P} + \hbar\mathbf{q}$, sehingga $\frac{du}{d(\hbar\mathbf{q})} = 1$.

Dengan demikian dapat diperoleh, $H = \frac{U^2}{2m} + V(\mathbf{r})$ dan $\frac{dH}{du} = \frac{u}{m}$. Selanjutnya dapat dihitung,

$$\frac{\partial H}{\partial(\hbar\mathbf{q})} = \frac{\partial H}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial(\hbar\mathbf{q})} = \frac{u}{m} = \frac{\hat{P} + \hbar\mathbf{q}}{m} \quad (37)$$

Ruas kanan persamaan (37) memiliki dimensi yang sama dengan dimensi kecepatan. Dengan demikian dapat diperoleh operator kecepatan transport elektron Bloch (dalam representasi ruang momentum) yaitu

$$\mathbf{v}(\mathbf{q}) = \frac{\partial H(\mathbf{q}, t)}{\partial(\hbar\mathbf{q})} = \frac{1}{\hbar} \frac{\partial H(\mathbf{q}, t)}{\partial \mathbf{q}} \quad (38)$$

Dengan menggunakan operator kecepatan (38) dapat diperoleh kecepatan rata-rata transport elektron Bloch

$$v_n(q) = \langle U_n | \mathbf{v}(\mathbf{q}) | U_n \rangle = \langle U_n | \frac{1}{\hbar} \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} (H_0 + H_{gangguan}) | U_n \rangle \quad (38)$$

Substitusikan $|U_n\rangle$ dari persamaan (35) kedalam persamaan (38) menghasilkan,

$$v_n(q) = \frac{1}{\hbar} \frac{\partial \varepsilon_n}{\partial q} - i \sum_{m \neq n} \frac{\langle m | \frac{\partial}{\partial t} | n \rangle}{\varepsilon_m - \varepsilon_n} \langle n | \frac{\partial H}{\partial q} | m \rangle + i \sum_{m \neq n} \langle m | \frac{\partial H}{\partial q} | n \rangle \frac{\langle n | \frac{\partial}{\partial t} | m \rangle}{\varepsilon_n - \varepsilon_m} \quad (39)$$

Selanjutnya digunakan definisi $\langle n | \frac{\partial H}{\partial q} | m \rangle = (\varepsilon_n - \varepsilon_m) \langle \frac{\partial n}{\partial q} | m \rangle$ dan $\langle m | \frac{\partial H}{\partial q} | n \rangle = (\varepsilon_m - \varepsilon_n) \langle \frac{\partial m}{\partial q} | n \rangle$

sehingga diperoleh,

$$v_n(q) = \frac{1}{\hbar} \frac{\partial \varepsilon_n}{\partial q} - i \left(\left\langle \frac{\partial n}{\partial q} \left| \frac{\partial n}{\partial t} \right. \right\rangle - \left\langle \frac{\partial n}{\partial t} \left| \frac{\partial n}{\partial q} \right. \right\rangle \right) \quad (40)$$

Dua suku terakhir pada ruas kanan memiliki bentuk yang analog dengan *Berry curvature* pada ruang parameter (ruang momentum dalam zona Brillouin),

$$\Omega_{q,t}^n = i \left(\left\langle \frac{\partial n}{\partial q} \left| \frac{\partial n}{\partial t} \right. \right\rangle - \left\langle \frac{\partial n}{\partial t} \left| \frac{\partial n}{\partial q} \right. \right\rangle \right) \quad (41)$$

Dengan demikian dapat diperoleh kecepatan transport rata-rata elektron Bloch

$$v_n(q) = \frac{1}{\hbar} \frac{\partial \varepsilon_n}{\partial q} - \Omega_{q,t}^n \quad (42)$$

Integrasi terhadap zona Brillouin menyebabkan suku pertama pada *derivative* energi gap (ε_n) dan hanya menyisakan suku kedua atau *Berry curvature*. Dengan demikian arus induksi adiabatik diberikan oleh

$$j = \sum_n \int_{BZ} v_n(q) dq = - \sum_n \int_{BZ} \frac{dq}{2\pi} \Omega_{q,t}^n \quad (43)$$

Yang sesuai seperti dijelaskan pada [7]. Faktor 2π menyatakan bahwa somasi dilakukan terhadap pita penuh (*filled bands*). Dapat disimpulkan bahwa arus adiabatik yang diinduksi dengan pendekatan teori perturbasi bergantung waktu pada pita sebanding dengan integral *Berry curvature* terhadap momentum q sesuai dengan penelitian yang telah dilakukan oleh Thouless (1983) [6].

Dinamika Elektron Bloch oleh Medan Listrik Eksternal

Tinjau interaksi kristal dengan medan listrik lemah. Medan listrik dapat diberikan melalui dua cara, diantaranya [7] :

1. Secara eksplisit masuk kedalam Hamiltonian melalui kopling potensial skalar elektrostatik $\phi(\mathbf{r})$
2. Melalui potensial vektor seragam $\mathbf{A}(t)$ yang bervariasi terhadap waktu. Dalam dinamika adiabatik sistem kuantum, vektor potensial direpresentasikan oleh *Berry connection* A_μ .

Terlebih dahulu akan ditinjau kasus 1 dimana Hamiltonian didefinisikan oleh kopling potensial skalar elektrostatis ϕ . Jika medan listrik \mathbf{E} bersifat seragam, maka ϕ akan bervariasi secara linear dalam ruang dan merusak simetri translasi kristal. Akibatnya, teorema Bloch tidak dapat digunakan. Untuk menghindari masalah tersebut, maka Hamiltonian tidak lagi didefinisikan oleh ϕ melainkan potensial vektor \mathbf{A} yang bervariasi terhadap waktu. Medan listrik dan medan magnet yang bersangkutan didefinisikan oleh

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad (44)$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (45)$$

Dalam subbab ini akan dijabarkan mekanisme yang memungkinkan terjadinya perusakan simetri translasi pada dinamika elektron Bloch akibat interaksi dengan medan eksternal. Didefinisikan Hamiltonian sistem dengan gangguan berupa interaksi medan listrik (misal dalam arah sumbu- x),

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_{\text{gangguan}} = \frac{\hat{P}^2}{2m} + \hat{E}\hat{x} \quad (46)$$

Hamiltonian yang didefinisikan oleh persamaan (46) tidak mempertahankan simetri translasi apabila dilakukan transformasi Gauge (lokal). Dengan menerapkan operator translasi yang memiliki periode translasi a pada Hamiltonian (46) maka dapat diperoleh

$$\hat{T}_x^\dagger(a) \hat{H} \hat{T}_x(a) = \hat{H} \quad (47)$$

$$e^{\frac{i}{\hbar} \hat{P}a} \hat{H} e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{P}a} = \hat{H} \quad (48)$$

Selanjutnya digunakan formula Baker-Campbell-Hausdorff sehingga ruas kiri persamaan (48) dapat diuraikan menjadi (ambil hingga orde-2)

$$e^{\frac{i}{\hbar} \hat{P}a} \left[\frac{\hat{P}^2}{2m} + \hat{E}\hat{x} \right] e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{P}a} = \frac{\hat{P}^2}{2m} + \hat{E}\hat{x} + \frac{ia}{\hbar} \{ [\hat{P}, \hat{E}]\hat{x} + \hat{E}(-i\hbar) \} \quad (49)$$

Dari persamaan (47) - (49) diperoleh

$$\frac{\hat{P}^2}{2m} + \hat{E}\hat{x} = \frac{\hat{P}^2}{2m} + \hat{E}\hat{x} + \frac{ia}{\hbar} \{ [\hat{P}, \hat{E}]\hat{x} + \hat{E}(-i\hbar) \} \quad (50)$$

Berdasarkan persamaan (50) dapat dilihat bahwa simetri translasi hanya dipenuhi apabila,

$$\frac{ia}{\hbar} [\hat{P}, \hat{E}]\hat{x} = 0 \quad (51)$$

atau \hat{P} dan \hat{E} saling komut. Secara fisis kondisi ini dapat dicapai jika medan listrik bersifat konstan. Untuk medan listrik yang divariasikan baik sebagai fungsi linear, eksponensial, dan berbagai fungsi tak konstan lainnya maka akan terjadi perusakan simetri translasi.

Selanjutnya akan ditinjau kasus 2 dimana simetri translasi dipertahankan oleh $\mathbf{A}(t)$. Dengan menggunakan *Peierls Substitution*, maka Hamiltonian pada persamaan (46) dapat dituliskan dalam bentuk [7]

$$H(t) = \frac{[\mathbf{P} + e\mathbf{A}(t)]^2}{2m} + V(\mathbf{r}) \quad (52)$$

Transformasi kedalam ruang momentum \mathbf{q} menghasilkan

$$H(\mathbf{q}, t) = H\left(\mathbf{q} + \frac{e}{\hbar} \mathbf{A}(t)\right) \quad (53)$$

Selanjutnya didefinisikan momentum kristal yang invarian gauge

$$\mathbf{k} = \mathbf{q} + \frac{e}{\hbar} \mathbf{A}(t) \quad (54)$$

Karena $\mathbf{A}(t)$ mempertahankan simetri translasi, maka \mathbf{q} bersifat konstan terhadap waktu dituliskan $\dot{\mathbf{q}} = 0$. Dengan demikian dapat diperoleh persamaan gerak,

$$\dot{\mathbf{k}} = -\frac{e}{\hbar} \mathbf{E} \quad (55)$$

Dengan menggunakan hubungan $\frac{\partial}{\partial q_\alpha} = \frac{\partial}{\partial k_\alpha}$ dan $\frac{\partial}{\partial t} = -\left(\frac{e}{\hbar}\right) E_\alpha \frac{\partial}{\partial k_\alpha}$ maka dapat diperoleh formulasi umum untuk vektor kecepatan pada state \mathbf{k} yaitu

$$\mathbf{v}_n(\mathbf{k}) = \frac{\partial \varepsilon_n(\mathbf{k})}{\hbar \partial \mathbf{k}} - \frac{e}{\hbar} \mathbf{E} \times \Omega_n(\mathbf{k}) \quad (56)$$

dimana $\Omega_n(\mathbf{k})$ merupakan *Berry curvature* yang didefinisikan oleh

$$\Omega_n(\mathbf{k}) = \nabla_{\mathbf{k}} \times \langle U_n(\mathbf{k}) | i \nabla_{\mathbf{k}} | U_n(\mathbf{k}) \rangle \quad (57)$$

suku kedua ruas kanan pada persamaan (53) didefinisikan sebagai kecepatan anomali. Kecepatan anomali selalu menyinggung atau tegak lurus dengan medan listrik, yang selanjutnya memberikan kontribusi pada arus Hall. Kecepatan anomali dikaji diantaranya oleh Karplus dan Luttinger (1954), Kohn dan Luttinger (1957), serta Adams dan Blount (1959) seperti dijelaskan pada [7].

KESIMPULAN

Untuk dinamika sistem kuantum yang bersifat adiabatik, evolusi keadaan selain dideskripsikan oleh fasa dinamik juga dideskripsikan oleh fasa geometrik yang disebut sebagai *Berry phase*. *Berry phase* merupakan kuantitas geometri lokal yang bersifat fisis karena invarian terhadap transformasi Gauge. Berdasarkan teori Gauge, untuk menjamin invariansi tersebut maka diperlukan suatu medan Gauge tertentu yang selanjutnya disebut sebagai *Berry curvature*. Sama seperti *Berry phase*, *Berry curvature* juga invarian terhadap transformasi Gauge (lokal). Akibatnya keduanya memiliki simetri internal. Karena parameter interaksi bernilai hingga maka simetri internalnya merupakan simetri diskrit, misalnya *T-symmetry* dan *I-Symmetry*. Berdasarkan hasil perhitungan, dapat disimpulkan bahwa untuk sistem yang memiliki kedua simetri tersebut, *Berry curvature* akan bernilai nol di sembarang titik pada ruang parameter.

Sebagai aplikasi ditinjau *Berry phase* dan *Berry curvature* pada dinamika spinor dalam medan magnet yang berotasi secara adiabatik serta dinamika elektron Bloch. Dalam meninjau dinamika elektron Bloch diberikan gangguan berupa medan listrik lemah. Medan listrik dapat diberikan dalam bentuk potensial skalar $\phi(\mathbf{r})$ maupun potensial vektor $\mathbf{A}(t)$. Dapat disimpulkan bahwa untuk Hamiltonian interaksi yang didefinisikan oleh kopling potensial skalar $\phi(\mathbf{r})$, jika medan listrik \mathbf{E} tidak konstan maka akan terjadi perusakan simetri translasi kristal. Untuk itu dipilih Hamiltonian interaksi sebagai fungsi dari potensial vektor $\mathbf{A}(t)$. Telah dihitung kecepatan dan arus transport adiabatik. Diperoleh bahwa kecepatan dan arus transport sebanding dengan *Berry curvature*. Dengan demikian, secara keseluruhan dapat disimpulkan bahwa dinamika sistem yang memiliki simetri internal (diskrit) tidak hanya dipengaruhi oleh gaya eksternal yang bekerja pada sistem tersebut melainkan juga dipengaruhi oleh sifat-sifat geometri sistem.

Dalam penelitian dibatasi hanya berupa gambaran umum mengenai *Berry curvature* dalam dinamika adiabatik sistem kuantum. Vektor keadaan U_n pada formula *Berry curvature* bergantung pada geometri sistem yang akan ditinjau. Sebagai pengembangan, dapat dipilih berbagai macam sistem misalnya dalam material terkondensasi dapat ditinjau material Dirac seperti grafen, Topological Insulator dan Semikonduktor, Weyl Semi-metal, dan lain sebagainya. Dengan mengetahui sifat-sifat geometri lokal *Berry curvature*, maka dapat dilakukan kajian lebih lanjut misalnya untuk menghitung sifat elektronik bahan meliputi konduktivitas listrik, konduktivitas panas, sifat respons bahan terhadap interaksi medan luar, dan lain sebagainya.

UCAPAN TERIMA KASIH

MPW mengucapkan terima kasih kepada LPDP RI (Lembaga Pengelola Dana Pendidikan Republik Indonesia) atas dukungan finansialnya dalam melaksanakan penelitian ini.

REFERENSI

1. A. Bohm *et al*, *The Geometric Phase in Quantum Systems*, Springer-Verlag, Berlin, 2003.
2. A. C. A. Pinto *et al*, *Am. J. Phys.* **68** 955-958 (2000).
3. C. A. Mead dan D. G. Truhlar, *J. Chem. Phys.*, **70** 2284-2296 (1979).
4. C. Nash dan S. Sen, *Topology and Geometry for Physicist*, Academic Press, London, 1983.
5. D. Higgins *et al*, *Proc. R. Soc. A*, **244** (1236) 1-16 (1958).
6. D. J. Thouless, M. Kohmoto, M. P. Nightingale, dan M. den Nijs. *Phys. Rev. Lett.* **49** 405 (1982).
7. D. Xiao, Ming-Che Chang, dan Qian Niu. *Rev. Mod. Phys.* **82**, 1959 (2010).
8. J. C. Solem dan L. C. Biedenharn, *Found. Phys.*, **23** (2) 185-195 (1993).
9. J. Liu dan L. B. Fu. *Phys. Rev. A*. **81** 052112 (2010).
10. J. T. Hwang dan P. Pechukas, *J. Chem. Phys.* **67** 460 (1977).

11. M. Baggio, V. Niarchos, dan K. Papadodimas, *J. High Energ. Phys.* **62** (2017).
12. M. Born, V. Fock, *Z. Phys.* **51** 165 (1928).
13. M. Nakahara, *Geometry, Topology, and Physics*, Adam Hilger, Bristol, 1990.
14. M. V. Berry, *Proc. R. Soc. Lond. A.* **392**. 45-57 (1984).
15. M. V. Berry, *Proc. R. Soc. Lond. A.* **414**. 31-46 (1987).
16. P. Ehrenfest. *Ann. d. Phys.* **51**. 327 (1916).
17. Q. Niu, Thouless, D. J., Wu, Y. S. *Phys. Rev. B.* **6**, 31 (1985).
18. R. G. Newton, *Phys. Rev. Lett.* **72** 954 (1994).
19. S. Bachmann *et al*, *Commun. Math. Phys.*, **3** (361) 997-1027 (2018).
20. S. Pancharatnam, *Proc. Indian Acad. Sci. A*, **44** 247-262 (1956).
21. Y. Aharonov dan J. Anandan, *Phys. Rev. D*, **35** 2597-2600 (1987).