Efek Relativistik pada Persamaan Difusi Black-Scholes serta Aplikasinya pada Analisis Harga Opsi Emiten di Indonesia

Oswin Bustari Priambodo[1,a)], Acep Purqon[1,b)]

[1)]Kelompok Keilmuan Fisika Bumi dan Sistem Kompleks,
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Institut Teknologi Bandung,
Jl. Ganesha no. 10 Bandung, Indonesia, 40132

[a)] oswinbustari911@gmail.com
[b)] acep@fi.itb.ac.id

Abstrak

Fisika memiliki peranan yang besar dalam dunia finansial, hal ini terllihat pemenang nobel ekonomi tahun 1969, Jan Tinbergen yang menggunakan konsep konsep fisika dalam pengembangan model analisis dinamiknya. Pada bidang produk derivatif finansial sendiri, peran fisika sangat besar dalam pembuatan solusi dari Black-Scholes Formula, dimana dalam pencarian solusinya, digunakan prinsip difusi. Black-Scholes Formula merupakan formula yang sering digunakan untuk menentukan nilai kontrak option dari suatu saham, namun pada abad 21 dimana internet trading sudah sangat umum, banyak fisikawan yang merasa kalau Black-Scholes Formula dirasa masih memiliki banyak ruang untuk meningkatkan kinerjanya, salah satu cara peningkatann kinerja formula Black-Scholes yang menarik adalah Relativistic-Black Scholes formula. Model ini menangggap bahwa tidak perduli seberapa cepat perubahan harga saham pada pasar modal, terdapat suatu batasan yang kita sebut sebagai C_m atau market speed of light. Dalam penelitian ini akan kita teliti bagaimana pengaruh faktor C_m ini pada penentuan harga kontrak option 2 emiten di Indonesia, yaitu Bank BRI dan Bank Mandiri. Dari penelitian yang sudah dilakukan, Relativistic Black Scholes Formula membutuhkan data yang saat ini belum tersedia di system pasar modal di Indonesia, sehingga hasil dari penelitian ini masih belum konklusif.

Kata kunci : Option, Black-Scholes Formula, Relativistic Black-Scholes formula, Saham

PENDAHULUAN

Latar Belakang

Ekonofisika merupakan salah satu cabang penelitian dalam fisika yang menggunakan teori dan metode yang digunakan di ilmu fisika untuk memecahkan masalah dalam bidang ekonomi. Meskipun di Indonesia cabang ilmu penelitian ini masih baru, dalam dunia global ekonofisika ini sudah ada sejak lama, pemenang nobel ekonomi tahun 1969, Jan Tinbergen dibantu oleh Paul Ehrenfest, menggunakan prinsip fisika dalam pengembangan model analisis ekonomi dinamiknya. Dalam dunia finansial sendiri terutama pasar modal, fisikawan seperti Jim Simons dikenal sebagai *money manager* yang lebih baik dari Warren Buffet. Jim Simons merupakan pendiri salah satu firma investasi dengan nilai *return* terbaik pada tahun 1988 yaitu *Renaissance Technologies*. Fisika juga banyak berperan dalam bidang produk derivatif finansial seperti *opsi*, aspek fisika sendiri muncul dalam penentuan solusi dari persamaan differensial parsial dari *Black-Scholes* *formula*, proses penyelesaian persamaan formula ini menggunakan persamaan difusi [4] dan background dari Fischer Black yang memiliki background fisika [8]. Black-Scholes formula dikembangkan oleh ***Fisher Black*** dan ***Myron Scholes.*** *Black-Scholes formula* ini diketahui umum dapat digunakan untuk menilai harga *call option* dan *put option*, formula ini telah digunakan secara luas oleh anggota komunitas investasi asset derivative, terutama penentuan nilai kontrak opsi dengan ketepatan yang sangat tinggi. Pada abad 21, *Black-Scholes formula* dirasa masih memiliki banyak ruang untuk dilakukan perbaikan, perbaikan perlu dilakukan karena sebelum perhitungan dilakukan dengan menggunakan formula ini, diasumsikan bahwa nilai volatilitas konstan sepanjang tahun, jika memang nilai dari suatu saham itu sendiri memang tidak terlalu aktif, perhitungan dengan *Black-Scholes formula* masih bisa di lakukan. Namun, jika ternyata nilai dari saham ini sangat aktif, nilai volatilitas pada pasar tidak bisa dianggap konstan. Karena itulah hasil perhitungan dari *Black-Scholes formula* ini tidak selalu baik untuk segala iklim ekonomi. Sudah banyak kontribusi fisika dalam memberikan pandangan baru mengenai pasar modal dan produk-produk turunannya, seperti model quantum untuk pasar modal [9], dan berbagai macam cara untuk meningkatkan kinerja dari *Black-Scholes Formula* [1,2,3,10,11,12,13,14]

Namun dari penelitian-penelitian tersebut, penulis tertarik dengan model *Relativistic Black Scholes formula* [2] dikarenakan, selain ada faktor matematis yang menarik dalam pembentukan modelnya, juga terdapat suatu pandangan baru mengenai keadaan pasar modal di abad 21 ini. Ide dasar penambahan faktor relativistic ini sendiri berasal dari anggapan bahwa pasar modal sejak tahun 80-an mulai dipenuhi dengan system trading otomatis, yang mengakibatkan perubahan harga setiap detiknya lebih aktif. Namun, seperti system system lain di dunia, terdapat suatu batasan seberapa cepat harga ini bisa berubah,yang akan kita sebut C_m atau *market speed of light*, seberapa besar pengaruh faktor C_m terhadap penentuan harga kontrak *opsi* lah yang membuat model ini menarik.

Tujuan Penelitian

Tujuan dari penelitian ini adalah:

1. Menguji kinerja *Black-Scholes Formula* dalam penentuan nilai kontrak *opsi* pada 4 perusahaan emiten saham yaitu Bank BRI, Bank Mandiri, Gudang Garam, Indofood
2. Menguji kinerja *Relativistic Black-Scholes Formula* dalam penentuan nilai kontrak *opsi* pada 4 perusahaan emiten saham yaitu, Bank BRI, Bank Mandiri, Gudang Garam, Indofood
3. Membandingkan kinerja *Black-Scholes Formula* dan *Relativistic Black Scholes* Formula, dan menjelaskan model mana yang lebih cocok untuk menentukan harga kontrak *opsi* di iklim pasar modal di Indonesia

METODE PENELITIAN

Black-Scholes Formula

Black-Scholes formula ini mengasumsikan bahwa pergerakan harga dari suatu saham dalam interval waktu tertentu memiliki distribusi yang bersifat lognormal. Formula Black-Scholes ini di dasari oleh suatu prinsip yang dikenal dengan *Law of one price* atau kadang dikenal juga dengan istilah *Risk Neutral world*. Faktor faktor yang menentukan keluaran dari formula ini sendiri adalah

- Harga dari saham (S)
- *Strike price* (K)
- Jangka waktu sampai kontrak berakhir (T-t)
- Nilai bunga tanpa resiko (r)
- Volatilitas (σ)

Seperti sudah di jelaskan diatas, untuk melakukan perhitungan menggunakan Black-Scholes formula ini, perhitungan harus dilakukan dalam *Risk Neutral World* yang berarti harus diterapkan beberapa asumsi pada keadaan asset dan keadaan marketnya sendiri, berikut asumsi asumsi yang digunakan:

- Pada asset
    1. *Rate of return* dari asset ini konstan, mengikuti bunga tanpa resiko/suku bunga
    2. Pergerakan harga dari saham bersifat *Brownian motion*, lebih spesifik lagi bersifat *geometric Brownian motion*
    3. Saham tidak membayar dividen

- Pada pasar
  1. Tidak ada kesempatan untuk arbitrasi (Mendapatkan uang dengan resiko 0)
  2. Dimungkinkan untuk meminjam/meminjamkan uang dengan bunga tanpa resiko
  3. Dimungkinkan untuk membeli/menjual saham pada jumlah sekecil apapun
  4. Transaksi diatas tidak dikenakan biaya

Bentuk dari formula ini adalah:

$$\frac{\partial V}{\partial t}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial^2 S}\sigma_t{}^2 S^2+\frac{\partial V}{\partial S_t}rS-rV=0 \tag{1}$$

Dengan:

- V: Nilai *payout* option
- σ_t : Volatilitas
- S : Harga saham
- r: Nilai suku bunga

Untuk mendapatkan solusi dari persamaan di atas sendiri dapat kita dapatkan dengan melakukan substitusi, dan membuat persamaan Black-Scholes ini memiliki bentuk yang mirip dengan persamaan difusi, substitusi yang kita lakukan adalah

$$V(S,t)=Kv(x,t) \tag{2}$$

$$x=\ln\left(\frac{S}{K}\right) \tag{3}$$

$$S=Ke^x \tag{4}$$

$$\tau=(T-t)\frac{\sigma^2}{2} \tag{5}$$

Dengan melakukan substitusi diatas maka persamaan Black-Scholes akan memiliki bentuk yang mirip dengan persamaan difusi, dengan bentuk solusi umumnya adalah

$$V(S,t)=SN(d_1)-Ke^{-r(T-t)}N(d_2) \tag{6}$$

dengan batasan

$$d_1=\frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right)+(\tau)\left(r+\frac{\sigma^2}{2}\right)}{\sigma\sqrt{\tau}} \tag{7}$$

$$d_2=\frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right)+(\tau)\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)}{\sigma\sqrt{\tau}} \tag{8}$$

Relativistic Black-Scholes Formula

Misal dengan keadaan pasar pada abad 21 ini, kita misalkan sebuah asset memiliki harga *S(t)* dan asset ini akan mengalmi perubahan nilai ke nilai *S(t+Δt)>S(t),* maka nilai *S(t)* harus bisa melewati semua nilai yang ada pada pasar, dalam selang waktu *t* sampai *Δt*, dan hal ini mengenalkan kita pada konsep gesekan pada pasar, karena dalam dinamikanya, tentu akan ada saja pihak yang menganggap harga tersebut terlalu tinggi, dan hal ini akan mengakibatkan kecepatan perubahan dari harga ini berubah menjadi semakin kecil. Dalam fisika sendiri, kondisi ini mirip seperti cahaya yang melewati suatu media yang sangat padat. Kecepatan cahaya akan berkurang sesuai dengan hubungan $v=\frac{c}{n}$, dimana n adalah indeks refraksi, bahkan dalam kondisi yang sangat ekstrim, seperti saat cahaya melewati *Bose-einstein condensate*, kecepatan effektif dari cahaya bisa sekecil 1 m/s. Untuk melihat efek dari resistansi yang dihasilkan ini pada pasar modal, misalkan

$$x(t)=\ln S(t) \tag{9}$$

ISBN : 978-602-19655-9-7

Maka batas kecepatan perubahan pada nilai X , berdasarkan kondisi yang sudah kita tulis dapat diformulasikan

$$\left|\dot{x}(t)\right| = \frac{\left|\dot{S}\right|}{S} < \frac{C_m}{S} \tag{10}$$

Jika diasumsikan harga dari asset ada di orde 10000 rupiah, dan nilai C_m ada di orde 10^9/s, maka nilai perubahan dari $\dot{x}(t) < 10^4 / s$, maka untuk perhitungan perharinya, nilai perubahan x setiap waktu bisa mencapai 8.64 x 10^9, namun hal ini tidak sama dengan kenyataan yang ada di pasar, seperti yang kita lihat pada tabel 1

Tabel 1. Harga saham dan nilai log returnnya [2]

Nama Perusahaan	Buka	Tutup	Tanggal	Log-return
Indosat (ISAT.JK)	4210	4100	26-Jan-15	-0.026476
Agung Podomoro Land (APLN.JK)	426	446	30-Jan-15	0.0458796
Bank Mandiri (Persero) Tbk. (BMRI.JK)	11325	11250	5-Feb-15	-0.006645
Bank Central Asia (BBCA.JK)	13525	13900	4-Feb-15	0.027349
Bank Negara Indonesia (BBNI.JK)	6200	6250	2-Feb-15	0.0080322
Bank Rakyat Indonesia (BBRI.JK)	11675	11725	2-Feb-15	0.0042735
Krakatau Steel (KRAS.JK)	465	464	3-Feb-15	-0.002153
Indofood Sukses Makmur Tbk. (INDF.JK)	7450	7625	22-Jan-15	0.0232183

Dari data data diatas, kita dapatkan bahwa nilai dari $\left|\dot{x}\right|$ tidak ada di order 10^{12} melainkan hanya ada di orde 10^0, maka hal ini mengisyaratkan bahwa resistansi di pasar Indonesia sangat kuat untuk harga sebuah saham bergerak ke naik atau turun, dari sini dapat disimpulkan bahwa kecepatan perubahan nilai *S(t)* jauh lebih kecil daripada C_m, maka dari hasil ini, nilai C_m akan digunakan sebagai nilai batas atas dari $\left|\dot{x}\right|$, sekarang pertanyaan yang harus di jawab adalah, bagaimana faktor relativistic yang mengandung C_m ini dapat di ikut sertakan kedalam *Black-Scholes formula*

Untuk memasukkan faktor C_m kedalam Black-Scholes formula, kita gunakan persamaan telegrapher pada saat $\lim v \to \infty$, kemudian pada limit tersebut kita dapatkan bahwa persamaan telegrapher akan berbentuk persamaan difusi relativistik. Istilah relativistik pada Relativistic Black-Scholes formula ini muncul karena persamaan telegrapher, bisa kita dapat dari persamaan dirac pada dimensi 1+1

Jika kondisi diatas di terapkan maka akan di dapatkan persamaan differensial untuk *relativistic Black-Scholes formula:*

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial^2 S}\sigma_t^{\,2} S^2 + \frac{\partial V}{\partial S_t} rS = rV + \frac{\sigma^2}{2C_m^2} R \tag{11}$$

Solusi *V(S,t)* dari persamaan diatas yang nantinya akan disebut *relativistic* Black-Scholes formula adalah

$$V(S,\tau) = SN(d_1) - Ke^{-r\tau} N(d_2) + \frac{1}{C_m^{\,2}} v \tag{12}$$

dengan nilai

$$V(S,\tau) = SN(d_1) - Ke^{-r\tau} N(d_2) + \frac{1}{C_m^{\,2}} v \tag{13}$$

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right) + (\tau)\left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)}{\sigma\sqrt{\tau}} \tag{14}$$

$$d_2 = \frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right) + (\tau)\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)}{\sigma\sqrt{\tau}} \tag{15}$$

$$v = -\frac{\sigma^2}{8\tau}\left[SM(d_1) - Ke^{-r\tau}M(d_2)\right] - \frac{S\sigma^2}{8\sqrt{2\pi\tau}}e^{-\frac{d_1^2}{2}}\left(1 + \frac{3}{2}d_1^2 + \frac{3}{2}d_2^2 - \frac{1}{2}\sigma^2\tau\right) \tag{16}$$

$$M(z) = N(z)z^2\left(z^2 + 2\right) \tag{17}$$

Put-Call Parity

Put-Call parity merupakan sifat dari kontrak opsi *put* dan *call* dengan *underlying* yang sama dan dengan nilai *strike price* dan waktu berlaku yang sama pula, dimana hasil perhitungan dengan menggunakan hubungan antar keduanya harus sama tidak boleh menghasilkan sisa satu pun, meskipun pada kenyataannya masih ada perbedaan, perbedaan tersebut harus dibuat seminimal mungkin.

Untuk memastikan hubungan ini berlaku, formula yang akan kita gunakan adalah

$$C = P + S_0 - Ke^{-rt} \tag{18}$$

dengan

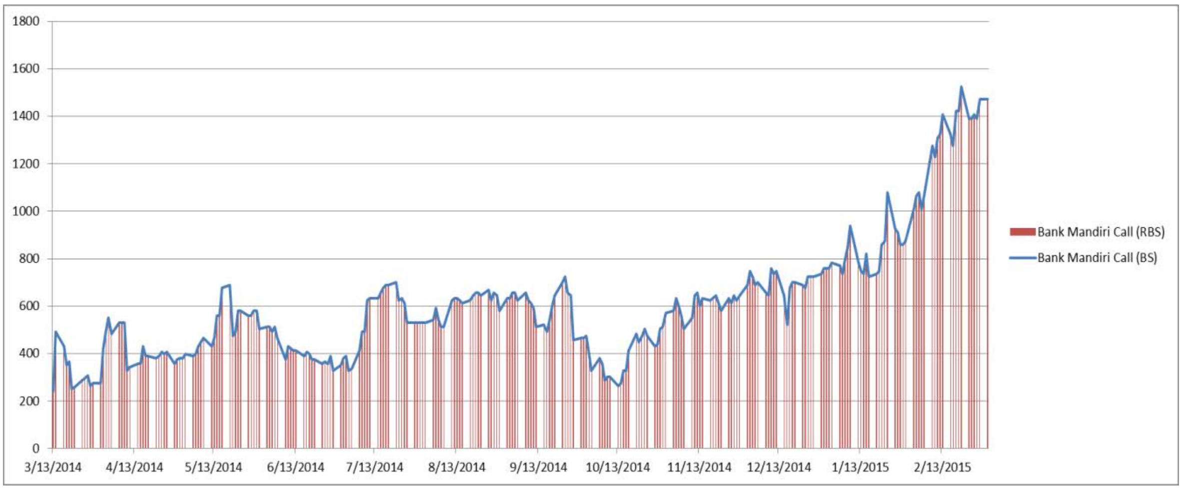
C : Harga opsi *Call*
P : Harga opsi *Put*
K : *Strike Price*
r : Nilai suku bunga saat perhitungan
t : waktu berlaku kontrak (tahunan)

Untuk melihat apakah suatu model yang digunakan dalam perhitungan nilai kontrak opsi dari sebuah emiten saham dapat digunakan atau tidak, hubungan sifat paritas dari *opsi put* dan *call* ini harus dipenuhi, karena jika hubungan ini dipenuhi maka tidak akan ada kesempatan melakukan arbitrasi dan dalam perhitungan dengan menggunakan Black-Scholes formula, salah satu asumsi yang dilakukan adalah tidak diperkenankan adanya kesempatan melakukan arbitrasi

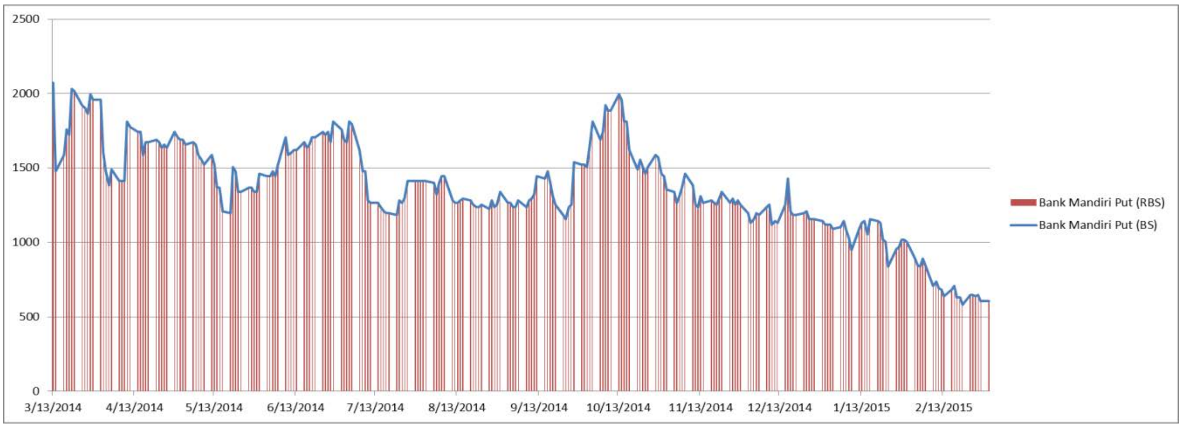
HASIL DAN PEMBAHASAN

Berikut adalah hasil perhitungan oleh kedua model yang di representasikan oleh grafik di bawah ini

a. Bank Mandiri

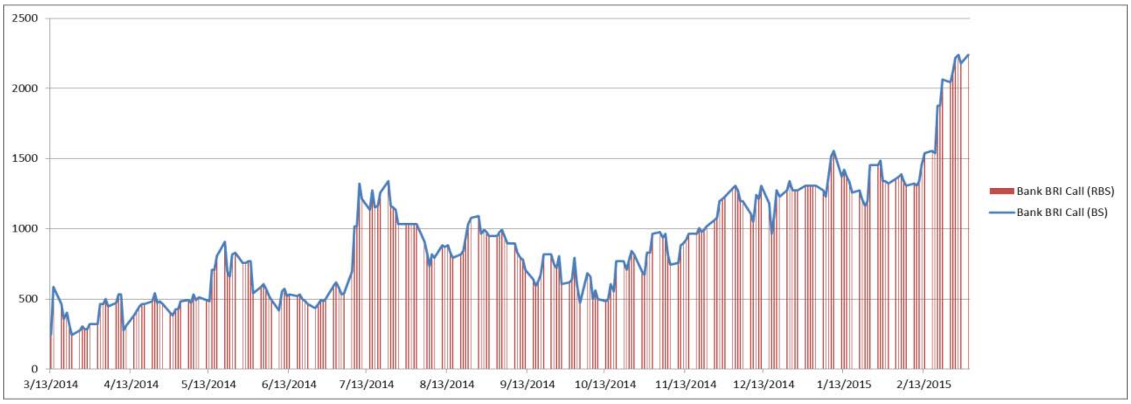


Gambar 1. Perbandingan nilai kontrak opsi Call pada saham Bank Mandiri (Black Scholes dan Relativistic Black Scholes

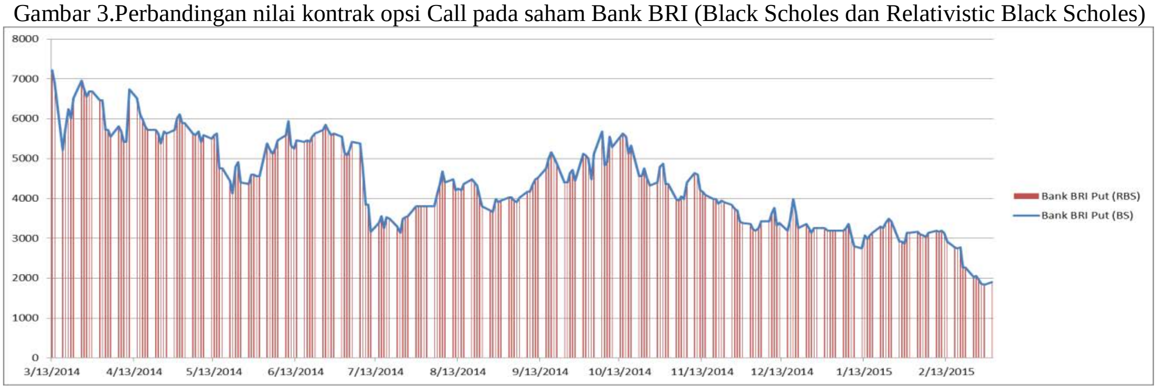


Gambar 2. Perbandingan nilai kontrak opsi Put pada saham Bank Mandiri (Black Scholes dan Relativistic Black Scholes)

b. Bank BRI



Gambar 3.Perbandingan nilai kontrak opsi Call pada saham Bank BRI (Black Scholes dan Relativistic Black Scholes)



Perbandingan nilai kontrak opsi Put pada saham Bank BRI (Black Scholes dan Relativistic Black Scholes)

Dari hasil pada kurva [1,2,3,4,5,6,7,8] diatas dapat dilihat bahwa kinerja *Black-Scholes Formula* dan *Relativistic Black-Scholes Formula* untuk menghitung nilai kontrak opsi dari 4 emiten yang dijadikan objek penelitian memiliki nilai yang mirip, untuk mencari tahu penyebab kemiripan kinerja ini sendiri dapat dilihat dari bentuk formula dari masing masing model

- *Black-Scholes Formula*

$$C = S\phi\left(d_1\right) - Ke^{-r(T-t)}\phi\left(d_2\right)$$

- *Relativistic Black-Scholes Formula*

$$C_r = SN\left(d_1\right) - Ke^{-r\tau}N\left(d_2\right) + \frac{1}{C_m{}^2}v$$

Bisa dilihat jelas untuk contoh formula opsi *call* diatas, perbedaan antara kedua model diatas ditunjukkan oleh faktor $\left(+\frac{1}{C_m^{\ 2}}v\right)$. Untuk memenuhi kondisi bahwa tidak ada kesempatan untuk melakukan arbitrasi, maka salah satu indicator utamanya adalah dipenuhinya sifat paritas dari opsi put dan call dari suatu saham, atau put-call parity. Pada referensi [2] disebutkan bahwa agar hubungan sifat paritas dari opsi call dan put bisa terpenuhi, dan agar tidak ada kesempatan bagi semua pihak untuk melakukan arbitrasi nilai C_m harus >10, dan jika nilai data Cm<10, maka sifat paritas dari opsi call dan put tidak terpenuhi dan akibatnya model Relativistic Black-Scholes ini tidak bisa kita gunakan untuk menentukan nilai kontrak dari opsi, namun jika model ini diterapkan pada data real, karakteristik yang muncul dari hasil penelitian berbeda dengan teori yang dikemukakan pada referensi [2], yaitu berapapun nilai C_m yang digunakan, sifat paritas dari opsi call dan put tetap terpenuhi

Tabel 8. Hasil perhitungan dengan sifat paritas dan formula pada Cm=0.1 dan Cm=0.5dengan berbagai macam nilai strike price

Put Call Parity Cm=0.5				
Emiten	**RBS call Cm=0.5 K=15.000**	**RBS Call from Cm=0.5 K=10.000**	**RBS Call Cm=0.5 K=5.000**	**RBS Call Cm=0.5 K=50.000**
Mandiri	196.9225566	2096.62433	-56512.33195	-0.000216677
BRI	738.4767423	2346.396729	-60450.8794	-0.149086401
RBS Calculation Cm=0.5				
Emiten	**RBS call Cm=0.5 K=15.000**	**RBS Call from Cm=0.5 K=10.000**	**RBS Call Cm=0.5 K=5.000**	**RBS Call Cm=0.5 K=50.000**
Mandiri	196.9225566	2096.62433	-56512.33195	-0.000216677
BRI	738.4767423	2346.396729	-60450.8794	-0.149086401
Put Call Parity Cm=0.1				
Emiten	**RBS call Cm=0.1 K=15.000**	**RBS Call from Cm=0.1 K=10.000**	**RBS Call Cm=0.1 K=5.000**	**RBS Call Cm=0.1 K=50.000**
Mandiri	-5737.725543	-16403.55293	-1589479.081	-0.00544447
BRI	-5336.612884	-32823.70376	-1710742.45	-3.764145713
RBS Calculation Cm=0.1				
Emiten	**RBS call Cm=0.1 K=15.000**	**RBS Call from Cm=0.1 K=10.000**	**RBS Call Cm=0.1 K=5.000**	**RBS Call Cm=0.1 K=50.000**
Mandiri	-5737.725543	-16403.55293	-1589479.081	-0.00544447
BRI	-5336.612884	-32823.70376	-1710742.45	-3.764145713

Untuk mengetahui nilai C_m yang representatif terhadap keadaan pasar, bisa digunakan perbandingan antara *Implied Volatility* yang dihasilkan dari model dengan nilai volatilitas yang dihasilkan dari emiten yang kita hitung nilai kontrak *opsi*-nya. Nilai *Implied Volatility* sendiri bisa kita dapatkan dengan membandingkan harga yang sudah kita dapatkan secara teoritis dengan harga yang tertera pada bursa opsi, kemudian dengan menggunakan fungsi *What if* pada Microsoft Excel akan didapat nilai volatilitas berapa agar hasil teoritis sama dengan harga di bursa. *Implied Volatility* ini sendiri muncul karena pada bursa harga opsi ditentukan langsung oleh kemauan pasar, sama seperti saham, harga ditentukan oleh harga yang ditawarkan oleh pihak yang ingin menjual opsi tersebut dan berapa harga yang diinginkan oleh pihak yang ingin membeli kontrak tersebut, atau dalam teori ekonomi umumnya disebut sebagai teori *Supply and Demand*. Dari harga yang berlaku di pasar itulah bisa diprediksi nilai volatilitas yang diinginkan oleh pasar untuk emiten-emiten yang terdaftar pada bursa *opsi* tersebut, namun hal ini menjadi masalah karena di Indonesia sendiri opsi kemungkinan baru akan diberlakukan tahun 2016, maka sampai opsi diberlakukan, tidak bisa ditentukan berapa nilai *Implied Volatility*-nya, dan akibatnya nilai C_m yang representatif belum bisa dicari nilainya, karena itulah untuk menghitung nilai kontrak opsi baik call maupun put untuk saham di Indonesia, akan lebih baik jika digunakan model *Black-Scholes formula*, setidaknya sampai system *opsi* diterapkan di Indonesia dan *Implied volatility* bisa kita hitung dan penelitian lebih lanjut bisa dilakukan.

KESIMPULAN

1. Dalam penentuan nilai harga kontrak opsi saham dari 2 emiten di Indonesia (Bank Mandiri, Bank BRI) *Black-Scholes Formula* memiliki kinerja yang baik dan dapat memenuhi syarat terpenuhinya sifat paritas dari *put* dan *call opsi*.
2. Dalam penentuan nilai harga kontrak opsi saham dari 2 emiten di Indonesia (Bank Mandiri, Bank BRI) *Relativistic Black-Scholes Formula* dengan nilai C_m=10 memiliki kinerja yang baik dan dapat memenuhi syarat terpenuhinya sifat paritas dari put dan call
3. Hasil nilai kontrak opsi yang dihasilkan oleh Relativistic Black-Scholes formula memiliki perbedaan yang sangat kecil jika dibandingkan dengan perhitungan dengan menggunakan *Black-Scholes Formula*
4. Semua nilai C_m memenuhi syarat perhitungan nilai kontrak opsi dan belum ada indicator yang bisa kita gunakan untuk menentukan mana nilai C_m yang representative terhadap keadaan pasar di Indonesia. Karena

itu *Black-Scholes Formula* memiliki kinerja yang lebih baik dalam penentuan nilai kontrak *opsi* saham di Indonesia

REFERENSI

1. Macbeth, James D.Merville, Larry J. An Empirical Examination of the Black Scholes Call Option Pricing Model, Blackwell publishing (2009)
2. Trzetrzelewski, Maciej, Relativistic Black Scholes Model. CRISIL Global Research and Analytics
3. Gencay, Ramazan. Salih, Aslihan, Degree of Mispricing with the Black Scholes Model and Nonparametric Cures, Annals of Economics and Finance (2003)
4. Hull, John C., Options, Futures, and Other derivative 8^{th} ed, 2012, Pearson Education, Boston
5. Duarte, Joe, Öptions and Futures for dummies, 2006, Wiley Publishing, Indiana
6. Goodman, Jonathan, Ito's Lemma for Brownian Motion, 2012, Lecture Notes
7. Pollock, D.S.G, Ito's Lemma, Lecture Notes, Stephen-pollock@sigmapi.u-net.com
8. Weatherhall, James Owen. The Physics of Wall Street. 2013, Mariner, New York
9. Huang, Lu. Zhang, Chao, A Quantum model for the Stock Market.School of Physics and Engineering, Sun Yat-Sen University, Guangzhou 510275, China
10. Linetsky,Vadim. The Path Integral Approach to Financial Modeling and Options Pricing.1997, Kluwer Academic Publishers. Netherlands
11. [11]Lemmens, Tempere, Wouters. Path Integral Approach to Closed Form Option Pricing Formulas wih Applications to stochastic Volatility and Interest Rate Models. 2008, Physical Review
12. [12]Matacz, Andrew. Path dependendent Option Pricing: the Path Integral Partial Averaging Method.2006.School of Mathematics and Statistics University of Sidney. Australia
13. [13] Clot, Marco Rosa, Taddel, Stefano, A Path Integral Approach to Derivative Security Pricing: I. Formalism and Analytical Results, 1999, arXiv
14. [14] S.I Melnyk and I.G. Tuluzov, Quantum Analog of the Black-Scholes Formula (market of financial derivatives as a continuous weak measurement),2008, Electronic Journal of Theoritical Physics