Studi Komparasi Algoritma Metropolis dan Solusi Analitik pada Ising Model 2 Dimensi untuk Identifikasi Transisi Fasa pada Ferromagnet

Pradipto[1,a)], Acep Purqon[1,b)],

[1] Laboratorium Fisika Bumi,
Kelompok Keilmuan Fisika Bumi dan Sistem Kompleks,
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Institut Teknologi Bandung,
Jl. Ganesha no. 10 Bandung, Indonesia, 40132

[a)] pradipto.academics@gmail.com
[b)]acep@fi.itb.ac.id

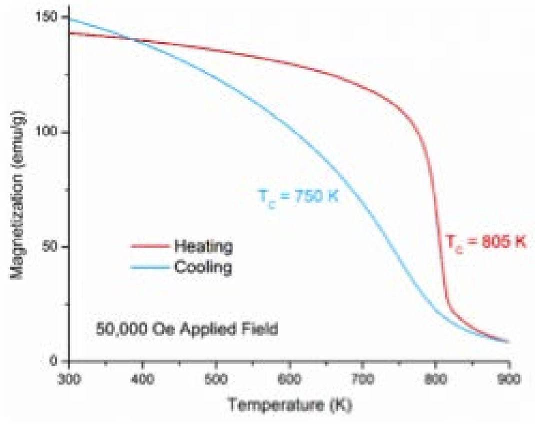
Abstrak

Transisi fasa pada ferromagnet terjadi pada temperatur curie(T_c). Pada temperatur ini bahan ferromagnet secara spontan mengalami transisi menjadi paramagnet atau kehilangan sifat magnetnya. Fenomena ini dapat dijelaskan dengan model Ising 2 Dimensi. Dalam model Ising, magnetisasi dihasilkan oleh konfigurasi biner spin magnetik (+1 atau -1). Fenomena transisi fasa pada ferromagnet dijelaskan dengan model Ising 2 Dimensi secera komputasi dengan metode Monte-Carlo dan Algoritma Metropolis. Solusi analitik untuk permasalahan ini telah diselesaikan sebelumnya oleh Onsager[3]. Algoritma metropolis merupakan modifikasi dari metode monte-carlo untuk simulasi sampel yang banyak, dengan memberikan bobot tertentu pada setiap konfigurasi dan transisi setiap iterasi. Pendekatan secara simulasi ini dinilai lebih efisien dibandingkan dengan solusi secara analitik, terutama untuk jumlah kisi yang banyak. Kami melanjutkan penelitian [6] dengan menambahkan perbandingan nilai magnetisasi terhadap temperatur. Kami menggunakan nilai konstanta Boltzmann dan kuat interaksi (k=J=1) agar simulasi menjadi "dimensionless". Simulasi akan dilakukan sebanyak 12000 kali iterasi monte-carlo dan 1000 kali iterasi tiap nilai temperatur untuk meminimalisir kondisi "metastable". Parameter teramati yang diidentifikasi adalah magnetisasi dan energi tiap kisi terhadap nilai temperatur. Nilai magnetisasi hasil simulasi akan dibandingkan dengan hasil analitik. Pada solusi analitik phase-transition terjadi pada temperature curie(T_c = 2.669185J/k A/m). Hasil simulasi berhasil menunjukkan transisi fasa pada nilai T_c yang medekati solusi analitik.

Kata-kata kunci: Model Ising, Ferromagnet, Monte-Carlo, Metropolis, Magnetisasi

PENDAHULUAN

Bahan Ferromagnetik memiliki peranan penting dalam industri dan teknologi modern. Bahan Ferromagnetik juga merupakan basis bagi banyak perangkat elektrik dan elektromekanik. Salah satu fenomena menarik dari bahan Ferromagnetik adalah fenomena transisi-fasa pada temperatur kritis tertentu



Gambar 1. Transisi Fasa pada Ferromagnetik [1]

Ernst Ising bersama dengan Wilhelm Lenz, membuat suatu model untuk bahan ferromagnetik [2] yang dinamakan model Ising. Namun, Solusi 1 dimensi model ini belum dapat menunjukkan fenomena transisi fasa hingga Lars Onsager mampu menunjukkan fenomena tersebut dalam solusi Ising Model 2 Dimensi [3] dengan menggunakan metode Matriks Transfer. Akan tetapi, solusi Onsager untuk Ising Model 2 Dimensi ini sangat rumit terlebih apabila digunakan jumlah kisi yang banyak.

Seiring dengan perkembangan teknologi, fisikawan dewasa ini mampu melakukan simulasi untuk permasalahan kompleks dalam fisika dengan teknologi komputasi. Salah satu capaian besar dalam perkembangan teknologi komputasi adalah ditemukannya metode Monte-Carlo dan juga Algoritma Metropolis [4]. Metode komputasi yang memanfaatkan bilangan acak ini mampu melakukan simulasi untuk permasalahan statistik dengan jumlah yang besar.

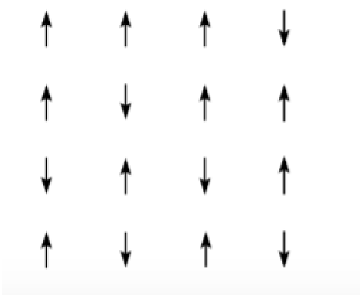
Metode Monte-Carlo dan algoritma Metropolis juga mampu untuk menyelesaikan Ising Model 2 Dimensi secara simulasi. Hal ini sudah dilakukan oleh Marchand, [5] Kotze [6] dan Gudmundsson [7], akan tetapi dari percobaan-percobaan di atas, belum ada yang membandingkan hasil magnetisasi spontan dari solusi analitik Onsager dengan hasil simulasi dengan metode Monte-Carlo dan algoritma Metropolis.

Tujuan dari penelitian ini adalah menunjukkan bahwa metode Monte-Carlo dan algoritma Metropolis dapat digunakan untuk simulasi model Ising 2 dimensi pada ferromagnet dan selanjutnya membandingkan hasil simulasi dengan hasil analitiknya. Dalam bab selanjutnya akan dijelaskan mengenai gambaran umum model Ising 2-D serta fenomena transisi fasa dan magnetisasi spontan, beserta solusi analitik dari model Ising 2 Dimensi. Selanjutnya akan dijelaskan secara singkat mengenai algoritma metropolis. Dalam bagian Hasil dan Diskusi akan ditampilkan hasil simulasi lalu akan dibandingkan dengan plot solusi analitik dari model tersebut.

MODEL ISING

Deskripsi Singkat Model Ising

Dalam Ising Model, bahan ferromagnetik tersusun dari kisi-kisi yang di dalamnya terdapat spin magnetik. Spin magnetik dalam Ising Model dapat bernilai (+1) atau (-1)



Gambar 2. Konfigurasi spin dalam Ising Model 2 Dimensi, panah keatas untuk spin (+1) dan panah kebawah untuk spin (-1).

Hamiltonian dari sistem tersebut adalah

$$H(\sigma) = -\sum_{\langle ij \rangle} J\sigma_i\sigma_j - \sum_i B\sigma_i \tag{1}$$

Dengan fungsi partisi,

$$Z = \sum_{\pm 1} e^{\beta H(\sigma)} \tag{2}$$

Selanjutnya, dapat kita definisikan probabilitas suatu sistem dengan keadaan tertentu,

$$P(\sigma) = \frac{e^{\beta H(\sigma)}}{Z} \tag{3}$$

Sehingga didapat magnetisasi dari sistem,

$$M = \frac{\partial logZ}{\partial B} = \sum_{\sigma} P(\sigma) \sum_i \sigma_i \tag{4}$$

Serta energi dari sistem

$$E = \sum_{\sigma} P(\sigma) H(\sigma) \tag{5}$$

Solusi Analitik Onsager

Solusi analitik untuk magnetisasi spontan dalam Ising Model 2 Dimensi adalah,

$$M = \begin{cases} \left(1 - \left[\sinh(2\beta J)\right]^{-4}\right)^{\frac{1}{8}}, \ T < T_c \\ 0, \ T \geq T_c \end{cases} \tag{6}$$

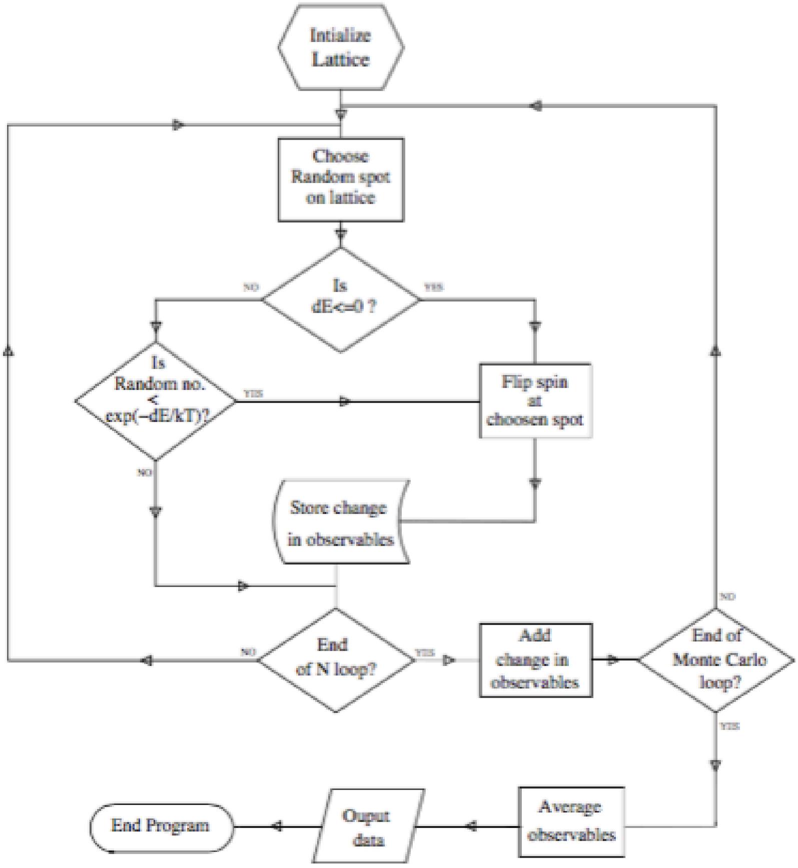
Pada temperatur kritis atau temperatur Curie (T_c) yaitu temperatur saat terjadinya transisi fasa,

$$2\tanh^2(2\beta J) = 1$$

$$kT_c \approx 2.269185 J \tag{7}$$

ALGORITMA METROPOLIS

Algoritma Metropolis merupakan modifikasi dari metode Monte-Carlo. Perbedaannya terletak pada penggunaan bobot tertentu dalam setiap *loop* dari iterasi Monte-Carlo. Berbeda dengan metode Monte-Carlo yang sepenuhnya *random*. Bobot yang digunakan dalam algoritma Metropolis dapat disesuaikan dengan kebutuhan simulasi. Dalam penelitian ini, bobot yang digunakan adalah �E / KT .
Berikut merupakan diagram alir dari algoritma Metropolis.



Gambar 3. Diagram Alir Algoritma Metropolis

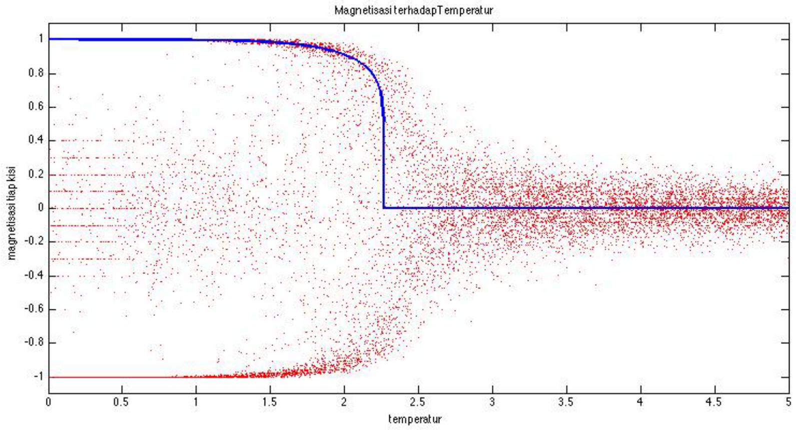
Agar mendapatkan hasil simulasi yang maksimal namun juga tetap efisien maka beberapa parameter simulasi harus kita atur sedemikian sehingga,

Tabel 1. Parameter Simulasi

Parameter	**Nilai**
Kuat Interaksi (J)	1
Konstanta Boltzmann (K)	1
Jumlah Iterasi Monte-Carlo	12000
Jumlah iterasi tiap nilai temperatur	1000
Dimensi Kisi	20×20

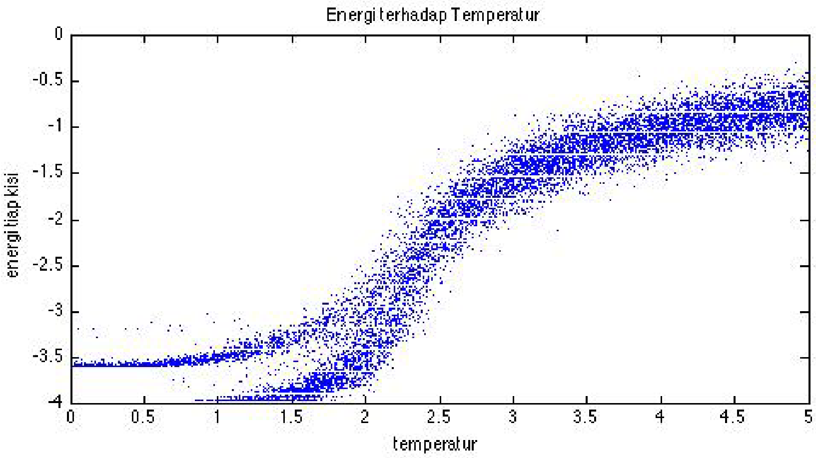
Kuat interaksi beserta konstanta Boltzmann diberi nilai 1 agar simulasi menjadi *dimensionless* . Selanjutnya, simulasi dilakukan dengan perangkat lunak Matlab dalam CPU Intel i5 1.3 GHz yang berjalan dalam sistem operasi MacOS X *El Capitan.*

HASIL SIMULASI DAN PERBANDINGAN DENGAN SOLUSI ANALITIK



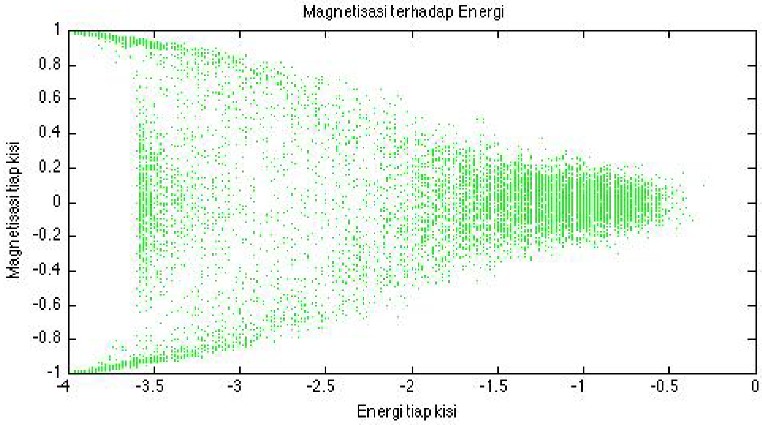
Gambar 4. Hasil simulasi magnetisasi terhadap temperatur, dibandingkan dengan solusi analitik Onsager untuk magnetisasi spontan.

Dari gambar (4) dapat di lihat bahwa hasil simulasi dengan metode Monte-Carlo dan algoritma Metropolis sesuai dengan *plot* solusi Onsager untuk magnetisasi spontan.



Gambar 5. Hasil simulasi dengan metode Monte-Carlo dan algoritma Metropolis untuk energi terhadap temperatur.

Pada temperatur rendah, sistem akan memiliki 2 keadaan dasar (*ground-states)* seperti terlihat pada gambar (5) dan gambar (4) . 2 keadaan dasar ini menunjukkan kondisi semua spin bernilai (+1) atau semua spin bernilai (-1). Keteraturan dari spin ini hanya mungkin terjadi pada temperatur atau tingkat energi rendah. Kondisi keteraturan ini sering disebut kondisi spin sejajar atau *parallel.* Dari gambar (4) dan (5) juga dapat dilihat bahwa terdapat keadaan di antara 2 keadaan dasar tersebut. Keadaan ini disebut keadaan *metastable.* Keadaan *metastable* ini diakibakan oleh kurangnya jumlah iterasi pada setiap nilai temperaturnya. Semakin banyak jumlah iterasi pada setiap nilai temperatur, maka spin akan semkin teratur dan cenderung menuju ke 2 keadaan dasar utama (+1) atau (-1).



Gambar 6. Hasil simulasi dengan metode Monte-Carlo dan algoritma Metropolis untuk energi terhadap magnetisasi

Dari gambar (6) terlihat bahwa magnetisasi akan semakin menurun dan hilang seiring dengan naiknya energi..

KESIMPULAN

Dari hasil simulasi berhasil didapatkan nilai magnetisasi dan energi untuk setiap temperatur dari Ising Model 2 Dimensi. Hasil simulasi untuk magnetisasi terhadap temperatur juga sesuai dengan *plot* dari solusi analitik Onsager. Hasil simulasi juga menunjukkan sistem memiliki 2 keadaan dasar (*ground-states*) pada temperatur rendah dan dibutuhkan lebih banyak lagi jumlah iterasi untuk setiap nilai temperaturnya agar dapat mengatasi munculnya keaadaan *metastable.* Untuk peneletian selanjutnya, dapat dilakukan simulasi Ising Model dengan metode Monte-Carlo dan algoritma Metropolis dalam 3 dimensi yang sejauh ini belum ditemukan solusi analitiknya. Selain itu, skema ini juga dapat digunakan untuk mengidentifikasi parameter makroskopik lainnya seperti energi Helmholtz atau kerentanan magnetik (*susceptibility)* dari bahan Ferromagnet.

REFERENSI

1. Laura H Lewis, Frederick E Pinkerton, Nina Bordeaux, Arif Mubarok, Eric Poirier, Joseph I Goldstein, Ralph Skomski, Katayun Barmak, *De Magnete et Meteorite: Cosmically Motivated Materials*, IEEE Magnetics Letters 5 ,1-4.(2014)
2. Huang, K, *Statistical Mechanics*, John Wiley and Sons(1987)
3. Onsager. L, *Crystal Statistics. I A Two-Dimensional Model with an Order-Disorder Transition*, Physical Review, 65, 3-4 (1943)
4. Metropolis,N.Rosenbluth, A,W. Rosenbluth, M,N. Teller, A,H , *Equation of State Calculations by Fast Computing Machines* , The Journal of Chemical Physics, 21, 6.(1953)
5. Marchand. D, *Classical Monte Carlo and the Metropolis Algorithm: Revisiting the 2D Ising Model,* University of British Columbia (2005)
6. Kotze. J, *Introduction to Monte Carlo method for an Ising Model of a Ferromagnet,* arXiv:0803.0271v1[cond-mat.stat-mech](2008)
7. Gudmundson. J. E, *Monte-Carlo Method and the Ising Model*, University of Uppsala(2008)