

## Perbandingan Kurva Resistivitas Semu pada Metode Geolistrik Menggunakan Metode Pencermian Bayangan dan Solusi Integral Fungsi Bessel

Asep Saefullah\*, dan Wahyu Srigutomo

### Abstrak

Metode pencermian bayangan dapat dimanfaatkan untuk memperoleh persamaan resistivitas semu pada metode geolistrik untuk kasus bumi dua lapisan. Metode ini bekerja dengan menganggap lapisan horizontal bumi sebagai cermin. Sumber arus listrik mengalami pencermian dan menghasilkan sumber-sumber arus listrik baru. Potensial listrik di permukaan bumi merupakan hasil penjumlahan potensial yang dihasilkan sumber-sumber baru arus listrik hasil pencermian. Dari persamaan potensial listrik, akan diperoleh persamaan resistivitas semu untuk bumi dua lapisan. Persamaan resistivitas semu juga dapat diperoleh memanfaatkan hubungan integral dari teori fungsi Bessel dalam koordinat selinder. Berdasarkan kedua persamaan resistivitas semu tersebut, akan dilakukan perbandingan dan analisa kurva resistivitas semu berdasarkan masing-masing metode. Hasil perbandingan kurva resistivitas semu menggunakan solusi integral fungsi Bessel lebih sesuai dengan model jika dibandingkan menggunakan metode pencermian bayangan.

**Kata-kata kunci:** kurva resistivitas semu, metode pencermian bayangan, solusi integral fungsi Bessel.

### Pendahuluan

Bumi tersusun atas beberapa lapisan, yang setiap lapisannya memiliki parameter fisis tersendiri, salah satunya resistivitas. Resistivitas merupakan parameter fisis sebuah material yang menunjukkan kemampuan untuk melawan aliran arus listrik [1]. Struktur bumi berlapis mengakibatkan adanya perbedaan resistivitas pada tiap lapisan, sehingga memunculkan konsep resistivitas semu. Resistivitas semu merupakan resistivitas dari suatu medium fiktif homogen yang ekuivalen dengan resistivitas medium berlapis yang ditinjau [2].

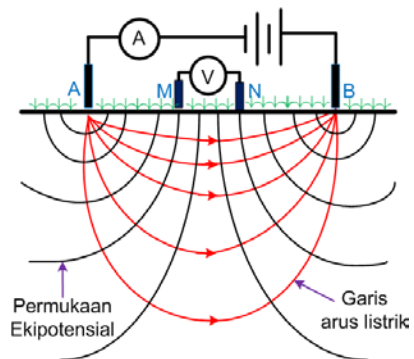
Metode geolistrik dapat dipergunakan untuk mengetahui struktur resistivitas lapisan bawah permukaan bumi. Metode ini bekerja dengan menginjeksikan arus listrik ke dalam bumi, sehingga menghasilkan beda potensial listrik di permukaan bumi yang terukur oleh voltmeter [2]. Pada metode geolistrik, formulasi resistivitas semu untuk model bumi dua lapisan dapat diperoleh menggunakan metode pencermian bayangan [3]. Selain itu, formulasi resistivitas semu untuk model bumi dua lapisan juga dapat diperoleh secara analitik dalam bentuk solusi integral fungsi Bessel [4].

Memanfaatkan dua formulasi resistivitas semu hasil dari metode pencermian bayangan dan solusi integral fungsi Bessel, dapat dilakukan perbandingan kurva resistivitas semu dari kedua formulasi tersebut. Pada penelitian ini, konfigurasi susunan elektroda yang digunakan adalah konfigurasi Schlumberger.

### Teori

#### Metode geolistrik

Metode geolistrik merupakan metode geofisika yang mempelajari aliran arus listrik di bawah permukaan bumi [2]. Metode ini bekerja dengan 4 buah elektroda, 2 buah elektroda potensial dan 2 buah elektroda arus (Gambar 1).



Gambar 1. Ilustrasi garis-garis arus listrik dan permukaan ekuipotensial [2].

Arus listrik diinjeksikan mengakibatkan adanya aliran arus di dalam bumi. Aliran arus listrik tersebut menghasilkan medan listrik yang sejajar dengan aliran arus, dan membangkitkan permukaan ekuipotensial yang berarah tegak lurus. Medan listrik ( $\vec{E}$ ) yang dihasilkan dapat ditulis seperti persamaan berikut :

$$\vec{E} = \rho \vec{J} = \rho \frac{I}{2\pi r^2} \quad (1)$$

Memfaatkan formulasi  $V = -\int \vec{E} \cdot d\vec{r}$ , maka akan dihasilkan persamaan potensial listrik seperti berikut :

$$V = \rho \frac{I}{2\pi r} \quad (2)$$

dimana  $\rho$  merupakan resistivitas,  $I$  merupakan arus listrik yang diinjeksikan, dan  $r$  adalah jarak titik terhadap sumber arus (elektroda arus).

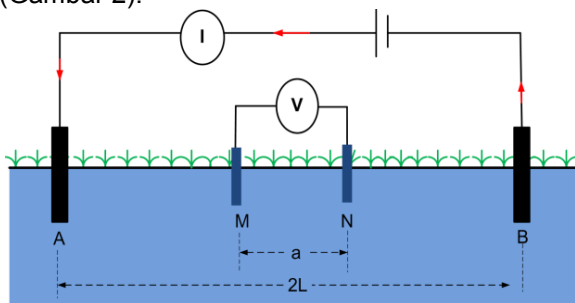
Pada konfigurasi umum metode geolistrik, jarak antar elektroda A dan B ke titik M adalah  $r_{AM}$  dan  $r_{BM}$ , sementara jarak elektroda A dan B ke titik N adalah  $r_{AN}$  dan  $r_{BN}$ . Potensial listrik di titik M dan N dihasilkan oleh elektroda A dan B. Sehingga, beda potensial antara titik M dan N adalah

$$\Delta V = \rho \frac{I}{2\pi} \left\{ \left( \frac{1}{r_{AM}} - \frac{1}{r_{BM}} \right) - \left( \frac{1}{r_{AN}} - \frac{1}{r_{BN}} \right) \right\} \quad (3)$$

Berdasarkan persamaan (3), diperoleh persamaan resistivitas semu seperti berikut :

$$\rho = 2\pi \frac{\Delta V}{I} \left\{ \left( \frac{1}{r_{AM}} - \frac{1}{r_{BM}} \right) - \left( \frac{1}{r_{AN}} - \frac{1}{r_{BN}} \right) \right\}^{-1} \quad (4)$$

Pada konfigurasi Schlumberger, jarak elektroda  $r_{AM} = r_{BN} = L - a$  dan  $r_{AN} = r_{BM} = L + a$  (Gambar 2).



Gambar 2. Konfigurasi Schlumberger untuk  $x = 0$  [2].

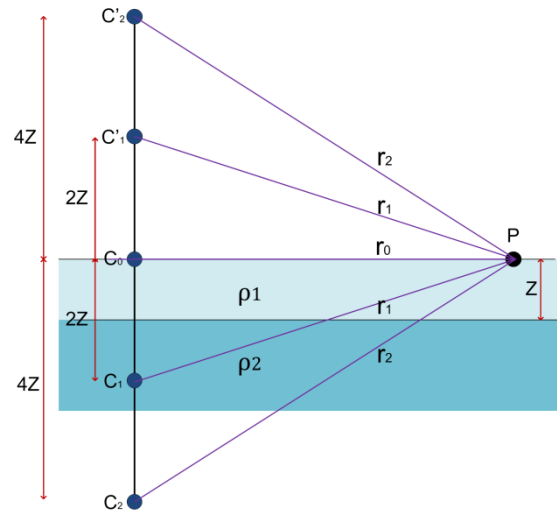
Dengan mensubstitusikan nilai  $r_{AM}$ ,  $r_{BM}$ ,  $r_{AN}$  dan  $r_{BN}$  pada persamaan (4) dan mengasumsikan  $L \gg a$ , maka diperoleh

$$\rho = \frac{\pi L^2 \Delta V}{2a I} \quad (5)$$

### Metode Pencermian Bayangan

Pada metode pencermian bayangan, sumber arus listrik ( $C_0$ ) diletakkan di

permukaan bumi, batas horizontal dibatasi oleh dua medium, bagian atas dengan resistivitas  $\rho_1$ , dan bagian bawah dengan resistivitas  $\rho_2$  (Gambar 2).



Gambar 3. Pencermian sumber arus listrik pada bumi dua lapis [5].

Efek dari pencermian,  $C_0$  mengalami pencermian oleh lapisan bawah dan menghasilkan bayangan  $C_1$ . Selanjutnya,  $C_1$  mengalami pencermian oleh lapisan atas dan menghasilkan bayangan  $C_1'$ . Setelah itu,  $C_1'$  mengalami pencermian oleh lapisan bawah dan menghasilkan bayangan  $C_2$ . Kemudian  $C_2$  mengalami pencermian oleh lapisan bawah dan menghasilkan bayangan  $C_2'$ , dan seterusnya [5]. Hasil dari pencermian menghasilkan sumber arus listrik baru seperti ditunjukkan tabel berikut :

Tabel 1. Intensitas sumber arus listrik

Sumber	Intensitas	Dalam/tinggi	Jarak
$C_0$	$I$	0	$r_0$
$C_1$	$kI$	$2z$	$r_1$
$C_1'$	$kk_a I$	$2z$	$r_1$
$C_2$	$kk_a kI$	$4z$	$r_2$
$C_2'$	$kk_a kk_a I$	$4z$	$r_2$

Nilai  $k_a = 1$  karena resistivitas udara bernilai tak hingga.

Berdasarkan data pada tabel 1, diperoleh persamaan potensial listrik di titik P pada

permukaan bumi seperti ditunjukkan persamaan (6) berikut ini.

$$V_p = \frac{I\rho_1}{2\pi} \left( \frac{1}{r} + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{k^m}{\sqrt{r^2 + (2mz)^2}} \right) \quad (6)$$

dengan  $k = \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2 + \rho_1}$ , yang merupakan koefisien pemantulan, dan  $\rho_1$  merupakan resistivitas lapisan pertama.

Untuk konfigurasi Schlumberger, beda potensial antara elektroda M dan N hasil dari pencerminan adalah

$$\Delta V = \frac{I\rho_1}{\pi} \frac{2a}{L^2} \left( 1 + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{k^m}{\sqrt{1 + (2mz/L)^2}} \right) \quad (7)$$

Dengan mensubstitusikan beda potensial pada persamaan (7) ke persamaan (5), maka akan diperoleh

$$\rho_a = \rho_1 \left( 1 + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{k^m}{\sqrt{1 + (2mz/L)^2}} \right) \quad (8)$$

### Solusi Integral fungsi Bessel

Menurut Koefoed (1979) and Parasnis (1986) dalam Li (2002), potensial pada lapisan atas untuk bumi berlapis adalah

$$\psi_1(r, z) = \frac{I\rho_1}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{(1 + A(\lambda))e^{-\lambda z}}{[B(\lambda)e^{\lambda z}]} J_0(\lambda r) d\lambda \quad (9)$$

sementara potensial pada lapisan kedua adalah

$$\psi_2(r, z) = \frac{I\rho_1}{2\pi} \int_0^{\infty} C(\lambda) e^{-\lambda z} J_0(\lambda r) d\lambda \quad (10)$$

Menurut Wait (1986), nilai A, B, dan C dapat diperoleh dengan menerapkan beberapa syarat batas, diantaranya :

1. Di permukaan bumi ( $z = 0$ ), rapat arus bernilai nol  $\frac{\partial \psi^s(r, z)}{\partial z} = 0$ .

$$\frac{\partial \psi^s(r, z)}{\partial z} = 0.$$

2. Pada bidang batas ( $z = h_1$ ), rapat arus listrik bernilai kontinu,  $\frac{1}{\rho_1} \frac{\partial \psi_1(r, z)}{\partial z} = \frac{1}{\rho_2} \frac{\partial \psi_2(r, z)}{\partial z}$ .

$$\frac{1}{\rho_1} \frac{\partial \psi_1(r, z)}{\partial z} = \frac{1}{\rho_2} \frac{\partial \psi_2(r, z)}{\partial z}.$$

3. Pada bidang batas ( $z = h_1$ ), rapat arus listrik bernilai kontinu,  $\psi_1(r, z) = \psi_2(r, z)$ .

Dari hasil penerapan syarat batas, diperoleh nilai A dan B seperti berikut :

$$A(\lambda) = B(\lambda) = \frac{ke^{-2\lambda h_1}}{(1 - e^{-2\lambda h_1})} \quad (10)$$

dimana  $h_1$  adalah kedalaman lapisan pertama.

Dengan mensubstitusikan nilai A dan B pada persamaan (9), maka akan diperoleh persamaan potensial di permukaan bumi ( $z = 0$ ) seperti berikut :

$$\psi_1(r, 0) = \frac{I\rho_1}{2\pi r} \left[ 1 + 2r \int_0^{\infty} A(\lambda) J_0(\lambda r) d\lambda \right] \quad (11)$$

dimana  $J_0$  fungsi Bessel orde pertama, dan  $\lambda$  merupakan konstanta separasi.

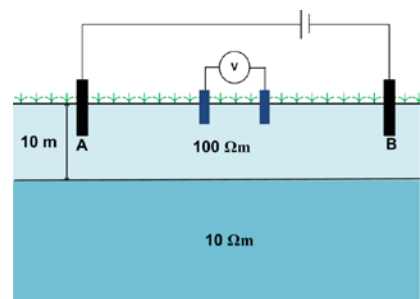
Potensial pada persamaan (11) dapat diturunkan terhadap  $r$ , sehingga persamaan resistivitas dalam bentuk fungsi Bessel seperti berikut :

$$\rho_a = r^2 \int_0^{\infty} T_1(\lambda) J_1(\lambda r) d\lambda \quad (12)$$

dengan  $T_1(\lambda) = \rho_1 \left( \frac{\rho_1 \tanh(\lambda h_1) + \rho_2}{\rho_1 + \rho_2 \tanh(\lambda h_1)} \right)$ .

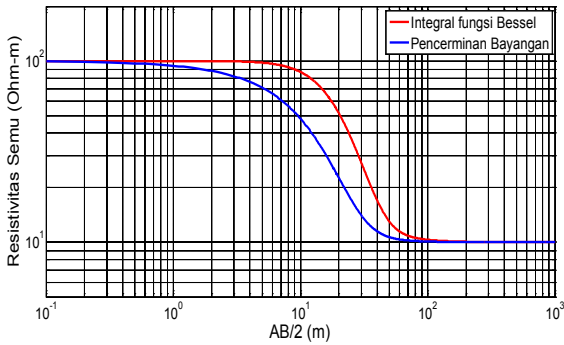
### Hasil dan Diskusi

Pada penelitian ini, akan dimodelkan model bumi dua lapisan dengan parameter fisis tertentu. Pada model, resistivitas lapisan pertama dan kedua masing-masing bernilai 100  $\Omega\text{m}$  dan 10  $\Omega\text{m}$ , sementara kedalaman lapisan pertama sebesar 10 m (Gambar 4).



Gambar 4. Ilustrasi model bumi dua lapisan.

Hasil perbandingan kurva resistivitas semu dari dua persamaan resistivitas semu dapat dilihat pada gambar 5.



Gambar 5. Perbandingan kurva resistivitas semu dari dua formulasi resistivitas.

Berdasarkan hasil perbandingan kurva resistivitas semu (Gambar 5), terlihat perbedaan kurva. Pada jarak  $AB/2$  di sekitar 10 m, yaitu kedalaman lapisan pertama ( $h_1$ ), kurva resistivitas semu menggunakan formulasi metode pencerminan bayangan (garis biru) nilainya lebih cepat turun dibanding menggunakan formulasi dalam bentuk solusi integral fungsi Bessel (garis merah) (tabel 2).

Tabel 2. Nilai resistivitas dari dua formulasi pada jarak  $AB/2$  tertentu.

AB/2 (m)	$\rho_a$ ( $\Omega$ m)	
	Solusi Bessel	Metode Bayangan
1	99.98	94.03
2	99.85	88.12
3	99.51	82.31
4	98.87	76.67
5	97.87	71.22
6	96.47	66.02
7	94.66	61.08
8	92.44	56.43
9	89.84	52.08
10	86.91	48.04

Kurva resistivitas yang benar adalah kurva yang sesuai dengan model. Hal ini berarti, kurva resistivitas semu akan mengalami perubahan secara perlahan pada jarak  $AB/2$  disekitar 10 m. Dengan demikian, dapat disimpulkan bahwa kurva yang menggunakan formulasi solusi integral fungsi Bessel menghasilkan kurva yang lebih sesuai dengan model. Kurva resistivitas mengalami perubahan secara perlahan, dan mengalami perubahan mencolok pada jarak  $AB/2$  sama dengan nilai kedalaman lapisan pertama. Hasil ini juga merepresentasikan secara kualitatif bahwa jarak  $AB/2$  merupakan representasi dari nilai kedalaman lapisan.

## Kesimpulan

Hasil penelitian menunjukkan bahwa kurva resistivitas semu menggunakan solusi integral fungsi Bessel memperlihatkan hasil yang lebih sesuai dengan model dibandingkan kurva resistivitas semu menggunakan metode pencerminan bayangan. Selain itu, jarak  $AB/2$  secara kualitatif merepresentasikan nilai kedalaman lapisan.

## REFERENSI

1. Lowrie, William, 2007. *Pundamentals of geophysics*. Cambrige : Cambrige university press
2. Sørensen, 2005. *Gheoelectrical method*. Burval : <http://www.liaghannover.de> (15 November 2015)
3. Telford, W M. 1996. *Applied Gheophysics*. Cambrige : Cambrige university press
4. Wait, James R. 1986. *Geo-electromagnetism*. London : Academic Press.
5. Kearey, Philip. 2001. *An Introduction To Gheophysical Exploration*. London : Blackwell science.
6. Li, Yogou. 2002. *Three-dimensional DC resistivity forward modelling using finite elements in comparison with finite-difference solutions*. <http://gji.oxfordjournals.org> , (19 september 2014).

Asep Saefullah\*  
Earth Physics and Complex System  
Institut Teknologi Bandung  
[asaefullah014@gmail.com](mailto:asaefullah014@gmail.com)

Wahyu Srigutomo  
Earth Physics and Complex System  
Institut Teknologi Bandung  
[wahyu@fi.itb.ac.id](mailto:wahyu@fi.itb.ac.id)

\*Corresponding author