

Penyelesaian Persamaan Differensial Orde Dua dengan Metode Euler pada Rangkaian RLC

Trise Nurul Ain* dan Nenry Kurniasih

Abstrak

Hukum-hukum dasar fisika dibangun berdasarkan fakta ilmiah secara eksperimental. Hukum-hukum tersebut menghasilkan persamaan differensial ketika dihubungkan dengan konsep energi, massa atau momentum sistem. Osilasi teredam rangkaian RLC merupakan salah satu sistem fisis yang dibangun berdasarkan persamaan differensial biasa. Energi listrik di kapasitor dan energi magnetik di induktor berosilasi secara periodik. Resistor pada rangkaian mengubah kedua energi tersebut menjadi energi panas sehingga energi sistem berkurang secara terus menerus. Dengan memperbesar nilai R , muatan pada rangkaian akan lebih cepat habis oleh karena semakin besarnya energi yang diubah menjadi panas. Pengaruh nilai R pada redaman muatan ini dapat diamati secara langsung melalui simulasi grafik osilasi pada Ms. Excel. Pengaruh R pada muatan yang dapat diamati secara langsung tersebut dapat mempermudah siswa dalam memahami konsep rangkaian RLC. Pada simulasi ini, penyelesaian PDB dilakukan secara analitik dan secara numerik dengan menggunakan metode Euler. Hasil perhitungan secara numerik kemudian dibandingkan dengan solusi analitik untuk mengetahui error dan kestabilan hasil. Berdasarkan hasil yang telah diperoleh, didapatkan grafik Q terhadap t pada kedua metode yang hampir sama. Error metode analitik ditemukan membesar kemudian menurun. Ketidakstabilan hasil ini disebabkan karena metode Euler menggunakan segment garis lurus untuk memprediksi solusi, sementara persamaan differensial yang ingin dicari merupakan PDB orde dua yang menghasilkan kurva sinusoidal. Hasil yang lebih stabil dapat diperoleh dengan menggunakan metode-metode pengembangan metode Euler seperti metode Heun, metode Range-Kutta dan metode midpoint.

Kata Kunci: metode Euler, osilasi, PDB, rangkaian RLC, solusi analitik, solusi numerik

Pendahuluan

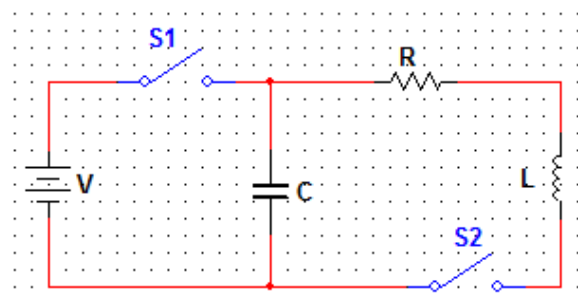
Hukum-hukum dasar fisika dibangun berdasarkan observasi empiris yang menjelaskan karakteristik dan bentuk suatu sistem. Hukum-hukum tersebut ditulis ke dalam bentuk hubungan perubahan spasial atau perubahan temporal yang dituangkan ke dalam persamaan differensial. Solusi suatu persamaan differensial dapat diselesaikan secara matematis melalui penurunan perumusan yang ada atau dengan menggunakan metode numerik yang dapat menghasilkan suatu simulasi.

Rangkaian RLC merupakan salah satu persoalan fisika yang melibatkan persamaan differensial. Persamaan differensial tersebut dapat diselesaikan secara numerik dengan menggunakan metode Euler atau dengan perhitungan manual dari solusi analitik pada *spreadsheet* Ms. Excel. Simulasi fisis osilasi teredam ini dapat menggambarkan pengaruh redaman resistor pada muatan secara langsung sehingga siswa diharapkan dapat lebih mudah memahami konsep materi tersebut. Selama ini, siswa hanya disuguhi gambaran grafik osilasi teredam pada *textbooks*. Pengaruh besarnya redaman resistor tidak dapat dilihat secara langsung. Melalui simulasi ini, nilai resistor dapat

diubah-ubah sehingga pengaruh redaman dapat segera diamati siswa.

Teori

Rangkaian RLC seri merupakan suatu rangkaian yang tersusun dari resistor, induktor, dan kapasitor yang dipasang secara seri (tidak melalui sebuah percabangan) seperti pada Gambar 1 di bawah ini.



Gambar 1. Rangkaian RLC seri [1].

Ketika saklar $S1$ ditutup dan saklar $S2$ dalam keadaan terbuka, kapasitor akan mengisi muatan sebesar Q_0 (muatan mula-mula). Selanjutnya, ketika saklar $S1$ dibuka dan saklar $S2$ tertutup, kapasitor akan mengalami pengosongan muatan dan mengalirkan arus

menuju induktor. Muatan yang bergerak pada kumparan di induktor menyebabkan timbulnya medan magnet. Energi listrik di kapasitor dan energi magnetik di induktor berosilasi secara harmonis terus menerus. Resistansi R pada rangkaian menyebabkan total energi tersebut tidak lagi konstan, tetapi berkurang sebagai akibat adanya energi yang ditransfer menjadi energi panas. Berkurangnya energi ini menyebabkan muatan maksimum berkurang terus menerus. Osilasi ini disebut dengan osilasi teredam seperti halnya pada osilasi harmonis teredam pada sistem balok-pegas di mekanika. Persamaan differensial osilasi teredam rangkaian RLC adalah sebagai berikut.

$$L \frac{d^2Q}{dt^2} + R \frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = 0 \quad (1)$$

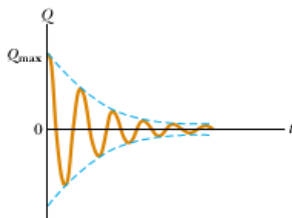
dengan L adalah induktansi dari induktor (H), R adalah resistansi dari hambatan (Ω), C adalah kapasitansi kapasitor (F), Q adalah muatan (coulomb) dan t adalah waktu (s) [1].

Solusi analitik dari Persamaan (1) di atas adalah sebagai berikut.

$$Q = Q_{\max} e^{-\frac{Rt}{2L}} \cos(\omega_d t + \phi) \quad (2)$$

dengan ω_d adalah frekuensi angular osilasi, Q_{\max} adalah muatan maksimum pada rangkaian, dan ϕ adalah fase awal osilasi [2].

Persamaan (2) menceritakan nilai muatan pada kapasitor yang terus berkurang terhadap waktu. Grafik nilai Q terhadap waktu dapat digambarkan sebagai berikut.



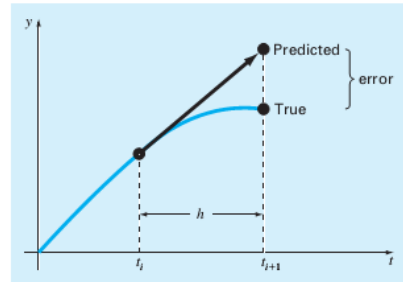
Gambar 2. Q terhadap t pada osilasi teredam [1].

Pada beberapa kasus, persamaan differensial biasa (PDB) orde tinggi sulit diselesaikan dengan cara analitik. Hal tersebut dapat diatasi dengan penyelesaian secara numerik dengan metode Euler.

Misalkan suatu fungsi memiliki persamaan differensial $\frac{dy}{dt} = f(t, y)$, nilai-nilai baru y pada metode Euler diprediksi menggunakan slope (turunan pertama pada nilai t awal) untuk mengekstrapolasi linear dengan step h seperti ditunjukkan pada Gambar 3 di bawah ini. Persamaan metode Euler dapat dituliskan sebagai berikut.

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n) \quad (3)$$

dengan $f(t_n, y_n)$ adalah persamaan differensial yang dicari pada t_n dan y_n dan h adalah lebar selang (time step).



Gambar 3. Metode Euler [3].

Error pada metode Euler dapat disebabkan oleh dua hal, yaitu step h yang digunakan dan bentuk kurva yang ingin dicari. Apabila fungsi yang dideferensialkan berupa kurva linear, maka error yang dihasilkan nol. Error ini dapat direduksi dengan memperkecil nilai h . Selain error, kestabilan juga harus diperhatikan. Solusi numerik dikatakan tidak stabil apabila error bertambah besar. Stabilitas tersebut dipengaruhi oleh tiga hal yaitu, persamaan differensial, metode numerik yang digunakan dan nilai h yang pakai.

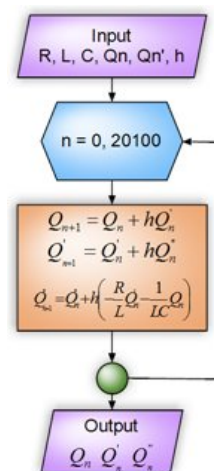
Untuk menentukan nilai Q_n , Q'_n , dan Q''_n dengan metode Euler adalah sebagai berikut.

$$Q_{n+1} = Q_n + hQ'_n \quad (4)$$

$$Q'_{n+1} = Q'_n + hQ''_n \quad (5)$$

$$Q''_{n+1} = Q''_n + h \left[-\frac{R}{L} Q'_n - \frac{1}{LC} Q_n \right] \quad (6)$$

Perhitungan dilakukan sampai pada $n=20100$. Secara sederhana, perhitungan dengan metode Euler dapat digambarkan melalui diagram alur sebagai berikut.



Gambar 4. Flowchart metode Euler

Nilai h yang digunakan harus disesuaikan dengan nilai-nilai variabel inputan R , L , dan C . Hal tersebut dikarenakan besarnya h sangat berkaitan erat dengan periode osilasi. Setelah

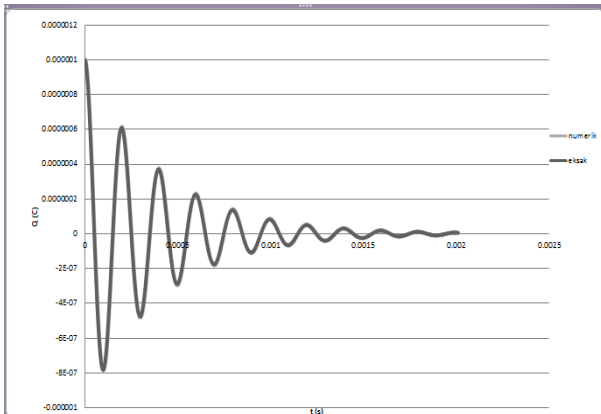
diketahui perioda satu gelombang penuh, maka besarnya h dapat ditentukan dengan perkiraan yang logis. Nilai h mempengaruhi banyaknya data yang diperlukan untuk osilasi satu gelombang penuh karena banyaknya data adalah perioda dibagi dengan h .

Perhitungan dilakukan secara langsung pada *spreadsheet*. Nilai hasil perhitungan Q_n kemudian diplot terhadap h . Secara analitik, Q_n didapatkan berdasarkan Persamaan (2) dengan t yang digunakan adalah h . Q_n yang diperoleh secara analitik kemudian diplot terhadap h kemudian hasilnya dibandingkan dengan hasil secara numerik. Error pada metode numerik dihitung berdasarkan persamaan di bawah ini.

$$\text{Error} = \frac{\text{nilai analitik} - \text{nilai numerik}}{\text{nilai analitik}} \times 100 \quad (7)$$

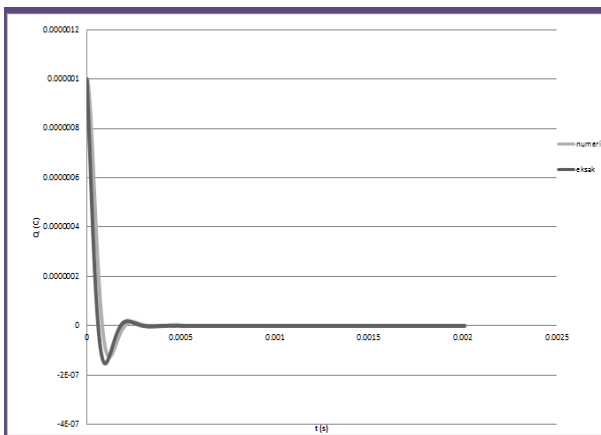
Hasil dan diskusi

Dengan menggunakan nilai R sebesar 5Ω , L 1 mH , C $1 \mu\text{F}$, h sebesar $1 \times 10^{-7} \text{ s}$, Q_n $1 \mu\text{C}$, dan Q'_n adalah 0 , didapatkan Grafik antara Q terhadap t sebagai berikut.

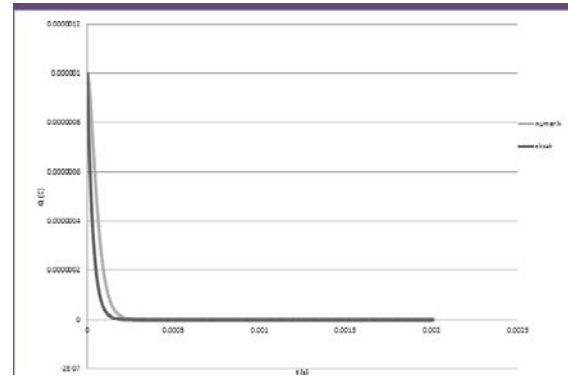


Gambar 5. Grafik Q terhadap t dengan $R = 5 \Omega$

Ketika nilai R diperbesar, diperoleh hasil sebagai berikut.



Gambar 6. Grafik Q terhadap t dengan $R = 35 \Omega$



Gambar 7. Grafik Q terhadap t dengan $R = 63 \Omega$

Persamaan utama yang membangun sistem rangkaian RLC merupakan PDB orde dua. PDB ini dapat diselesaikan secara numerik dengan metode Euler. Penyelesaian secara numerik menghasilkan solusi khusus dengan syarat nilai awal dan nilai batas yang ditentukan sebelumnya.

Hasil perhitungan secara numerik dengan metode Euler menghasilkan Q_n yang masih bernilai hampir sama pada iterasi awal, akan tetapi ketika iterasi diteruskan maka akan didapatkan nilai Q_n yang berubah-ubah. Plot grafik antara data Q_n terhadap t menghasilkan grafik osilasi dengan amplitudo yang terus mengecil seperti pada Gambar 5. Grafik osilasi tersebut menyerupai grafik pada Gambar 2.

Solusi analitik pada persamaan (2) mendeskripsikan osilasi sinusoidal dengan amplitudo Q_{maks} yang mengecil secara eksponensial dengan bertambahnya waktu oleh faktor $e^{-\frac{Rt}{2L}}$ yang disebut sebagai faktor redaman. Hal tersebut juga menceritakan adanya sebagian energi sistem yang hilang di resistor sehingga muatan Q pada kapasitor terus berkurang. Semakin besar hambatan yang digunakan pada rangkaian, semakin besar energi yang diubah menjadi energi panas dan muatan akan lebih cepat habis. Pada Gambar 6 dapat dilihat muatan pada sistem lebih cepat habis ketika nilai R diperbesar menjadi 35Ω . Ketika nilai R sebesar $\sqrt{\frac{4L}{C}}$, yaitu 63Ω terjadi *critically damped*.

Osilasi yang terjadi seperti pada Gambar 7. Perubahan nilai R ini dapat langsung diamati pengaruhnya pada rangkaian sehingga membuat siswa menjadi lebih mudah memahami konsep.

Iterasi yang dilakukan untuk menghasilkan 10 gelombang adalah sebanyak 20100 kali. Banyaknya data yang diperlukan dipengaruhi oleh periode gelombang dan lebar selang h yang digunakan. Semakin kecil lebar selang h yang digunakan pada periode gelombang yang sama, semakin banyak data yang diperlukan untuk

menghasilkan kurva dengan jumlah gelombang yang sama.

Dengan menggunakan nilai R , L , C , h , Q_n , dan Q'_n seperti pada data, diperoleh frekuensi angular osilasi adalah 31523.8 rad/s sehingga periode osilasinya adalah 0,2 ms. Nilai h yang digunakan harus jauh lebih kecil dari periode tersebut agar diperoleh hasil dengan error sekecil mungkin. Persamaan metode Euler pada Persamaan (6) secara eksplisit menjelaskan bahwa nilai-nilai Q_n selanjutnya diperoleh dari slope atau turunan pertama pada selang h . Slope atau gradient kemiringan merupakan garis lurus seperti terlihat pada Gambar 3. Oleh karena itu, apabila yang ingin dicari merupakan data-data dengan kurva sinusoidal, maka nilai h dibuat sekecil mungkin sehingga dalam satu periode terdapat banyak pias yang membagi slope-slope tersebut agar error setiap slope dapat diperkecil. Banyaknya data yang dibutuhkan untuk mendapatkan satu kali osilasi adalah periode dibagi dengan lebar selang h .

Meskipun hasil yang diperoleh dengan kedua metode hampir sama, akan tetapi error yang dihasilkan metode numerik terus membesar seiring dengan bentuk kurva yang melengkung membentuk kurva sinusoidal kemudian mengecil kembali ketika kurva mendekati garis lurus. Hal tersebut menyebabkan hasil dari metode numerik menjadi tidak stabil. Telah dijelaskan pada pendahuluan bahwa ketidakstabilan hasil metode numerik disebabkan oleh tiga hal yaitu, persamaan differensial, metode numerik yang digunakan dan nilai h yang pakai. Nilai h yang digunakan sudah cukup kecil yaitu 0.1 μ s. Dengan memperkecil nilai h ini, nilai error tidak berubah secara signifikan sehingga dapat disebutkan bahwa penyebab ketidakstabilan tersebut adalah karena persamaan differensial yang ingin dipecahkan dengan metode numerik yang digunakan. Hal tersebut sejalan dengan penjelasan metode Euler yang menggunakan segment garis lurus untuk memprediksi solusi, sementara persamaan differensial yang ingin dipecahkan merupakan PDB orde dua dengan kurva solusi berbentuk osilasi sinusoidal. Untuk memperoleh hasil yang lebih stabil dapat digunakan metode pengembangan metode Euler seperti metode Heun, metode Range-Kutta dan metode midpoint.

Kesimpulan

PDB orde dua pada sistem rangkaian RLC dapat dipecahkan secara numerik dengan menggunakan metode Euler dan secara analitik. Nilai R sistem dapat diubah-ubah sehingga pengaruh redaman muatan pada grafik Q terhadap t dapat langsung diamati. Hasil plot grafik Q terhadap t secara numerik maupun

analitik menunjukkan hasil yang hampir sama. Error pada metode numerik membesar sejalan dengan bentuk osilasi yang sinusoidal Hal tersebut dikarenakan metode Euler menggunakan segment garis lurus untuk memprediksi solusi, sementara PDB yang ingin dicari solusinya berbentuk sinusoidal. Hasil yang lebih stabil dapat diperoleh dengan menggunakan metode pengembangan metode Euler seperti metode Heun, Range-Kutta atau metode midpoint.

Ucapan terima kasih

Penulis mengucapkan terima kasih kepada Departemen Pendidikan dan Kebudayaan atas Beasiswa *Fresh Graduate* yang diterima penulis selama menempuh pendidikan program magister.

Referensi

- [1]. Raymond, A. Serway. Jewet, John W. 2004. *Physics for Scientists and Engineers*, 6th edition.
- [2]. Halliday, David. Resnick, Robert. Walker, Jearl. 2011. *Fundamentals of physics*, 9th edition. John Wiley & Sons
- [3]. Chapra, Steven C. 2012. *Applied numerical Methods with Matlab for Engineers and Scientists*, 3rd edition. New York: Mc Graw Hill

Trise Nurul Ain*
Magister Pengajaran Fisika
Institut Teknologi Bandung
trisenurulain@gmail.com

Neny Kurniasih
Nuclear Physics and Biophysics Research Division
Institut Teknologi Bandung
neny@fi.itb.ac.id

*Corresponding author