

Pemodelan Dan Eksperimen Untuk Menentukan Parameter Tumbukan Non Elastik Antara Benda Dengan Lantai

Puspa Monalisa^{1,a)}, Meda Cahya Fitriani^{1,b)}, Ela Aliyani^{1,c)}, Rizky Maiza^{1,d)}, Fiki Taufik Akbar^{2,e)}

¹Magister Pengajaran Fisika,
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Institut Teknologi Bandung,
Jl. Ganesha no. 10 Bandung, Indonesia, 40132

²Laboratorium Fisika Teoretik,
Kelompok Keilmuan Fisika Teoretik Energi Tinggi dan Instrumentasi,
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Institut Teknologi Bandung,
Jl. Ganesha no. 10 Bandung, Indonesia, 40132

^{a)} puspamonalisa93@gmail.com (corresponding author)

^{b)} mechafee@gmail.com

^{c)} el.al4427@gmail.com

^{d)} rizkymaiza@gmail.com

^{e)} ftakbar@gmail.com

Abstrak

Model untuk tumbukan antara partikel dengan dinding pada umumnya mengabaikan waktu kontak selama tumbukan sehingga model yang dihasilkan bersifat diskontinu. Penentuan parameter tumbukan antara benda dengan lantai tanpa mengabaikan waktu kontak memerlukan model lain dari tumbukan. Salah satu model yang dapat digunakan adalah mass-spring-damper dimana selama tumbukan, benda dianggap memiliki sifat elastik seperti pada pegas dan juga mengalami gaya hambat. Model tersebut menghubungkan parameter koefisien elastik dan faktor redaman dengan besaran-besaran yang terukur, seperti waktu kontak dan koefisien restitusi tumbukan. Grafik antara hasil eksperimen dan hasil pemodelan secara matematis dibandingkan untuk mengetahui kesesuaian model yang dibuat dengan hasil eksperimen. Berdasarkan eksperimen yang telah dilakukan, model ini memiliki nilai error yang kecil pada kasus mendekati lenting sempurna. Hal tersebut disebabkan karena untuk simplifikasi model yang digunakan mengasumsikan bahwa faktor osilasi jauh lebih besar daripada faktor redaman

Kata-kata kunci: Mass-damper-spring, pemodelan, tumbukan, waktu kontak

PENDAHULUAN

Pemantulan bola yang dijatuhkan secara vertikal dan terjadinya tumbukan antara bola dengan lantai merupakan masalah klasik yang dipelajari pada pelajaran fisika. Konsep massa, kekakuan dan redaman merupakan tiga unsur dari sistem mekanika dinamis yang merupakan elemen liner. Dalam kasus pemantulan bola, antara konsep massa, kekakuan dan redaman berkaitan dengan parameter terukur seperti koefisien restitusi, yaitu sebuah ukuran pemantulan dari peristiwa tumbukan. Namun, hal ini tidak dibahas pada buku-buku fisika pada umumnya, [1]. Terjadinya tumbukan antara bola dan lantai pada umumnya juga mengabaikan waktu kontak yang terjadi selama bertumbukan, Jenis bola yang berbeda memiliki kekakuan yang berbeda sehingga kemungkinan terjadi perbedaan waktu kontak dari setiap jenis bola dengan lantai.

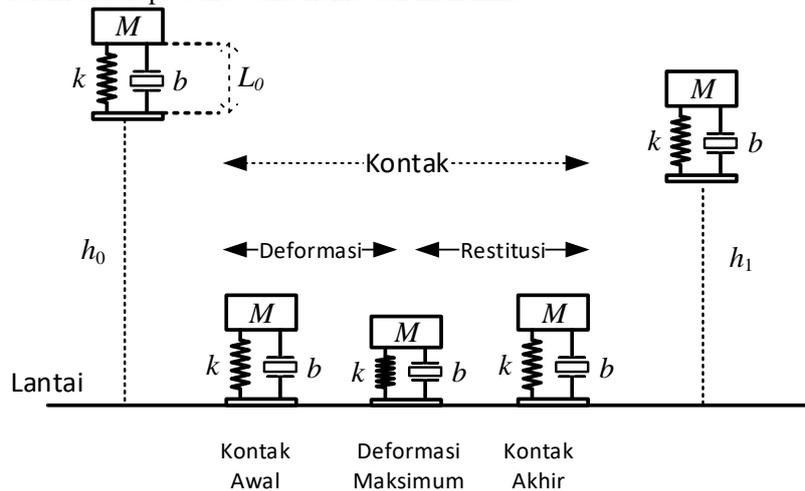
Makalah ini akan menunjukkan keterkaitan tersebut dengan membuat sebuah model pemantulan bola yaitu *mass-spring-damper model*. Model ini dibuat untuk menentukan parameter tumbukan dengan tidak mengabaikan waktu kontak tumbukan antara bola dan lantai, dimana selama tumbukan benda dianggap elastis seperti pegas dan juga mengalami daya hambat. Model ini menggunakan bola dengan berbeda jenis ukuran dan bahan untuk mengukur parameter waktu kontak dan koefisien restitusi dari masing-masing bola. Koefisien restitusi bola diperoleh dari perhitungan yang dihubungkan dengan ketinggian bola jatuh dari keadaan diam, jumlah pemantulan dan waktu total pemantulan bola. Dengan diketahui koefisien restitusi dan waktu kontak dapat menghitung kekakuan k dan redaman c . Untuk mengetahui kesesuaian model ini, hasil eksperimen dan hasil permodelan akan dibandingkan secara matematis.

MODEL MASS SPRING DAMPER

Untuk mempelajari perilaku bola yang jatuh secara vertikal, kita pertimbangkan sebuah model yang diilustrasikan pada Gambar 1, di mana bola diwakili oleh massa m , viskos redaman c , dan linear kekakuan k . Ketika bola tidak bersentuhan dengan tanah, persamaan gerak, dengan asumsi tidak ada hambatan aerodinamis, sehingga persamaannya dapat ditulis sebagai:

$$m\ddot{y} = -mg \tag{1}$$

di mana y diukur secara vertikal sampai ke pusat massa bola dengan $y = 0$ sesuai dengan kontak awal, yaitu, ketika bola melakukan kontak ke tanah tanpa deformasi. Kondisi awal adalah $y(0) = h_0$ dan $\dot{y}(0) = 0$ untuk bola yang dilepaskan pada ketinggian h_0 . Solusi persamaan ini merupakan gerak proyektil vertikal klasik yang banyak ditemukan dalam beberapa buku-buku fisika dan mekanika.



Gambar.1. Model Mass Spring Damper dari bola yang menunjukkan fase pada loncatan pertama.

Ketika bola berada dalam kontak dengan tanah, deformasi dan restitusi terjadi. Sehingga persamaan gerak menjadi,

$$m\ddot{y} + b\dot{y} + ky = -mg \tag{2}$$

dengan kondisi awal $y(0) = 0$ dan $\dot{y}(0) = v_0$ mana v_0 adalah kecepatan bola sesaat sebelum kontak dengan tanah. Dengan mengintegrasikan persamaan (2) memberikan;

$$y(t) = \left(\frac{cg - 2kv_0}{2k\omega_d} \sin \omega_d t + \frac{mg}{k} \cos \omega_d t \right) \times \exp\left(-\frac{ct}{2m}\right) - \frac{mg}{k} \tag{3}$$

di mana frekuensi alami teredam, ω_d , adalah

$$\omega_d = \frac{1}{2m} \sqrt{4km - b^2} \tag{4}$$

Persamaan (3) merupakan gerakan bola selama kontak dengan tanah dan hanya berlaku ketika $y \leq 0$. perilaku loncatan yang melibatkan deformasi, restitusi, dan kemudian *rebound*, membutuhkan solusi *underdamped* yang $\omega_d > 0$ atau $4km - b^2 > 0$

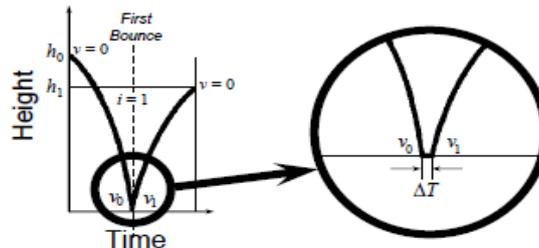
Keadaan "stabil" atau istirahat, diterapkan setelah proses pemantulan berhenti, hal ini dapat diperoleh dengan menetapkan $t \rightarrow \infty$ untuk persamaan (3). Sehingga posisi keseimbangannya adalah;

$$y^* = -\frac{mg}{k} \tag{5}$$

dan ketika $|y| \leq |y^*|$ maka tidak akan ada loncatan bola lebih lanjut. Oleh karena itu jumlah loncatan terbatas.

Frekuensi dan Rasio Redaman

Waktu kontak ΔT untuk loncatan bola yang pertama, ditampilkan pada Gambar 2, adalah waktu dari saat bola mencapai $y = 0$ setelah jatuh pada waktu pertama dan kembali ke $x = 0$.



Gambar 2. Model *Mass Spring Damper* dari bola yang menunjukkan fase pada loncatan pertama [1]

Dengan mengambil asumsi $\frac{mg}{k} \ll 1$, untuk sebuah bola memantul seperti pada bola ping-pong, solusi persamaan gerak dapat diperkirakan sebagai;

$$y(t) = \left[\frac{-v_0}{\omega_d} \exp\left(-\frac{c}{2m}t\right) \sin\omega_d t \right] \tag{7}$$

dengan frekuensi alami dapat dinyatakan oleh

$$\omega_n = \frac{\pi}{\Delta T} \sqrt{1 + \left(\frac{\ln \varepsilon}{\pi}\right)^2} \tag{8}$$

dan rasio redaman γ ,

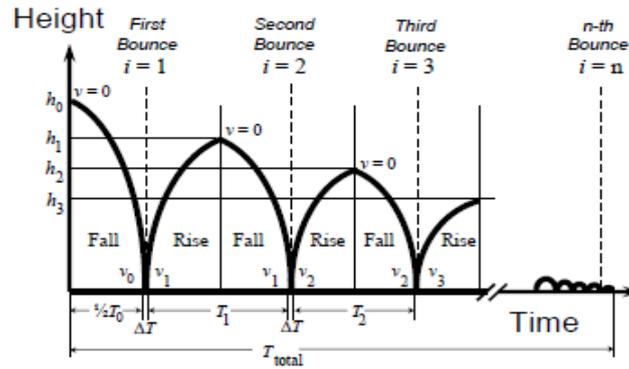
$$\gamma = \frac{c}{2m} = \frac{-\ln \varepsilon}{\pi} \left[1 + \left(\frac{\ln \varepsilon}{\pi}\right)^2 \right]^{-1/2} \tag{9}$$

Kedua persamaan diatas menunjukkan bahwa rasio redaman semata-mata tergantung pada koefisien restitusi (tidak bergantung pada kecepatan saat kontak).

Koefisien Restitusi dan Waktu Kontak

Diberikan sebuah bola dengan massa m dengan parameter k dan c atau ω_n dan γ yang umumnya tidak diketahui. Dari waktu kontak ΔT dan koefisien restitusi ε , yang juga tidak diketahui (tetapi dapat ditemukan secara eksperimental), ω_n dan γ dapat ditentukan dari persamaan. (8) dan (9).

Jumlah pantulan bola n , dan waktu total T_{total} , yang berlalu dari saat bola dijatuhkan sampai bola tersebut dalam keadaan diam merupakan dua parameter yang dapat ditentukan dengan mudah dalam percobaan. Hal ini ditunjukkan dalam diagram pantulan bola dari Gambar 3. Berikut, terlihat bahwa n dan T_{total} diasumsikan, diketahui, ΔT dan ε , serta k dan c , dapat ditentukan dengan asumsi ΔT dan ε konstan untuk semua pantulan dan mengabaikan hambatan aerodinamis.



Gambar. 3. Hubungan tinggi loncatan bola terhadap waktu [1]

Total waktu adalah jumlah total waktu selama proses pemantulan T_{flight} , dan total waktu kontak $T_{contact}$, dengan asumsi waktu kontak pantulan bola identik. Waktu selama proses pemantulan untuk setiap pantulan ke- i dapat ditulis sebagai saat $T_i = eT_i - 1$ untuk $i \geq 2$ dan $T_i = eT_0$, Karena $T_0 = 2\sqrt{2h_0/g}$, sehingga didapat;

$$T_{total} = \sqrt{\frac{2h_0}{g}} \times \left[\sqrt{2} \left(\frac{1+\varepsilon-2\varepsilon^n}{1-\varepsilon} \right) + n\varepsilon^n \sqrt{\pi^2 + (\ln\varepsilon)^2} \right] \quad (10)$$

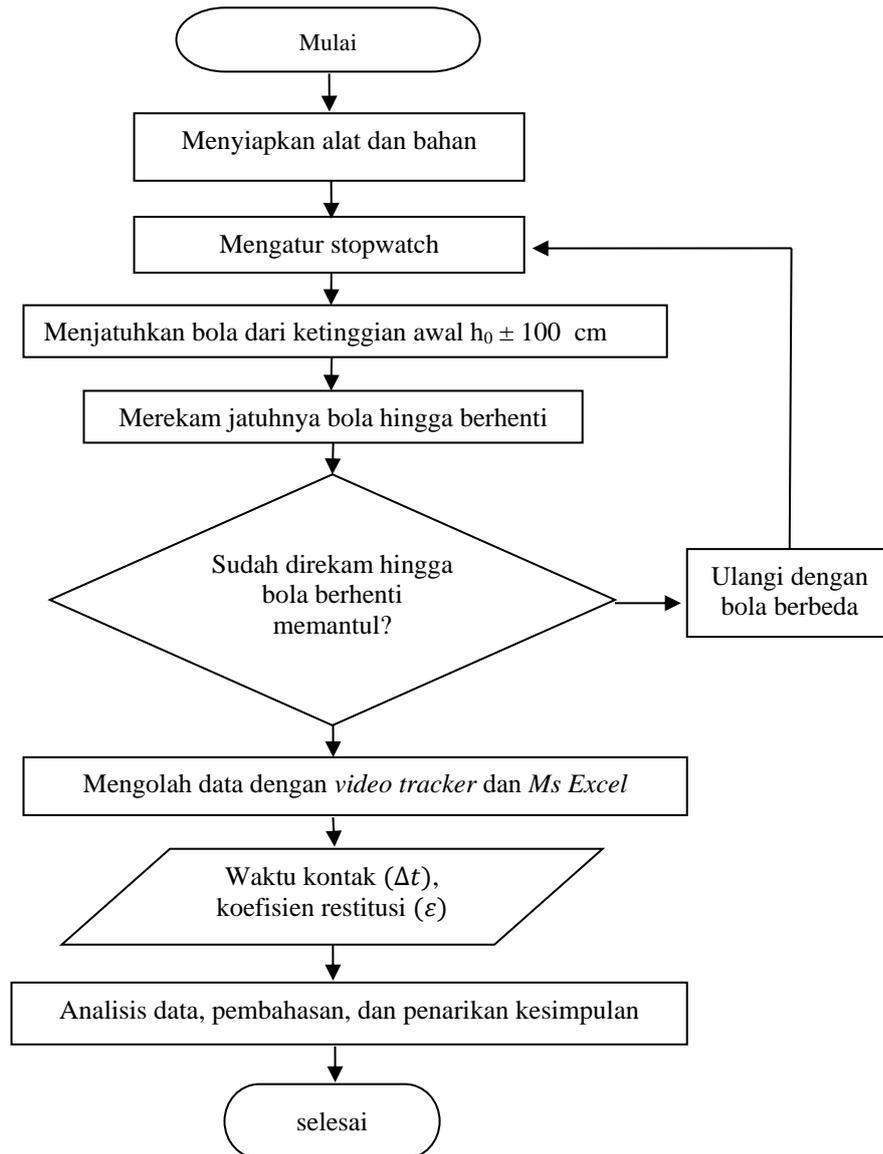
Persamaan (10) dapat dilihat sebagai persamaan tunggal untuk yang tidak diketahui ε dalam T_{total} , n , dan h_0 , sehingga tiga kuantitas tersebut dapat ditentukan secara eksperimental.

Untuk kasus $|\ln\varepsilon/\pi| \ll 1$, untuk rasio 0,1 atau lebih kecil dapat disamakan dengan $0,73 < \varepsilon < 1$. Kasus ini akan menjadi wakil dari bola dengan signifikan bola yang dapat memantul, seperti bola ping-pong. Untuk kasus ini, persamaan (10) dapat diperkirakan sebagai

$$T_{total} = \sqrt{\frac{2h_0}{g}} \left(\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} \right) \quad (11)$$

METODE PENELITIAN

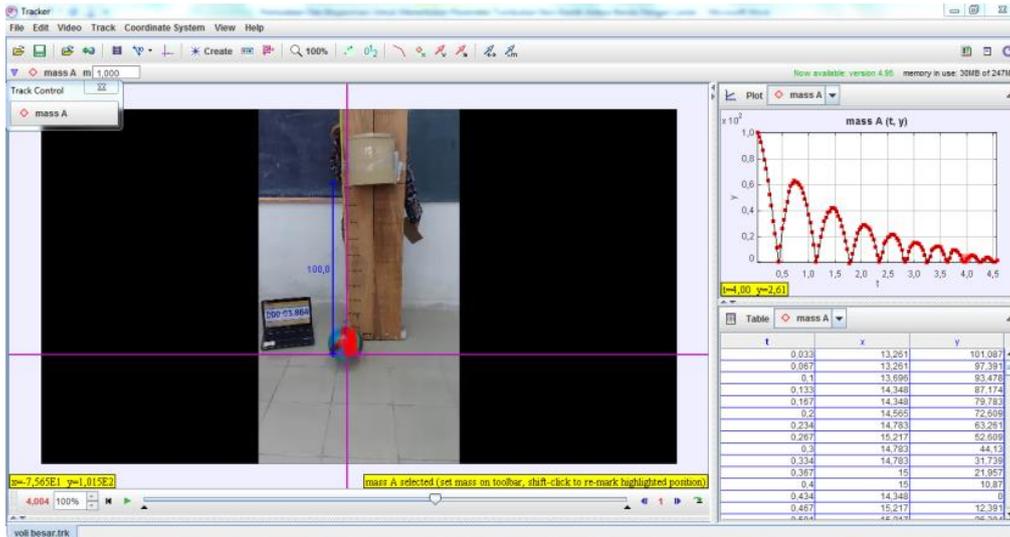
Pada eksperimen ini digunakan 4 jenis bola dengan koefisien restitusi berbeda. Pengukuran waktu kontak antara bola dan lantai dilakukan pada peristiwa bola jatuh bebas. Peristiwa jatuh bebas dapat dikondisikan dengan memasukkan bola ke dalam potongan pipa berdiameter sedikit lebih besar dibandingkan diameter bola. Pipa tersebut dipasang secara horizontal dengan ujung bawah pipa berada pada ketinggian $(100 \pm 0,05)$ cm. Pada ujung bawah pipa dipasang 2 penyangga untuk menahan bola. Penyangga dibuka dengan cara ditarik ke kanan dan kiri agar total torka pada bola 'nol'. Saat pengambilan data, bersamaan dengan menarik penyangga, stopwatch diaktifkan. Seluruh proses ini direkam menggunakan kamera *handphone* berkemampuan *30 frame per second (fps)* hingga bola berhenti memantul.



Gambar 4. Diagram Alir Eksperimen

Hasil eksperimen dan perbandingan dengan model matematis

Berdasarkan data eksperimen berupa file video, dapat dilakukan pengukuran ketinggian bola tiap satuan waktu dan waktu kontak menggunakan software Tracker 4.92. Gambar 5 merupakan tampilan dari software Tracker 4.92.



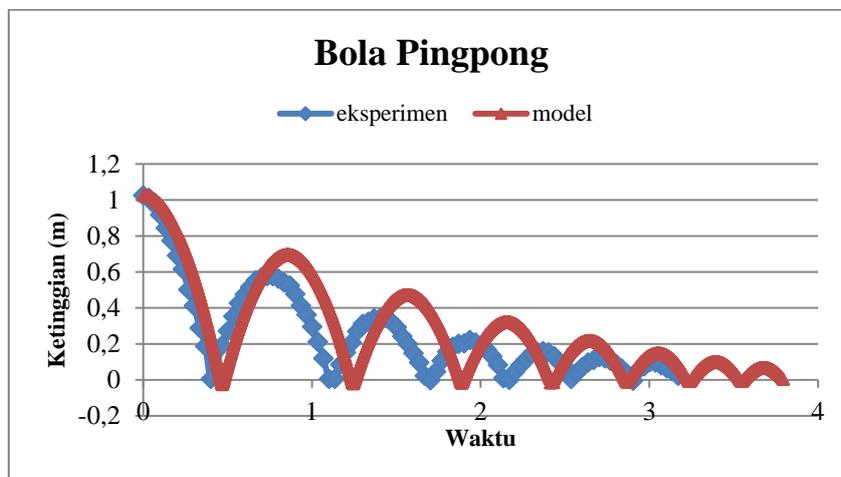
Gambar 5. Tampilan aplikasi Tracker

Perhitungan waktu kontak saat bola menumbuk lantai dapat dilihat dari *stopwatch* pada laptop, yaitu dengan mencatat waktu bola saat menyentuh lantai dan waktu saat bola mulai meninggalkan lantai. Berdasarkan data posisi bola tiap waktu yang diperoleh dari *Tracker*, dapat diketahui besar koefisien restitusi bola yang digunakan dengan membandingkan ketinggian maksimum setiap pantulan. Waktu kontak dan koefisien restitusi pada setiap bola merupakan parameter yang diperlukan pada model matematis untuk menentukan besar osilasi dari bola yang diwakili dengan ω dan besar redaman dari bola yang diwakili dengan γ . Besar waktu kontak, koefisien restitusi, γ , dan ω pada 4 jenis bola yang digunakan dapat dilihat pada tabel 1 berikut ini:

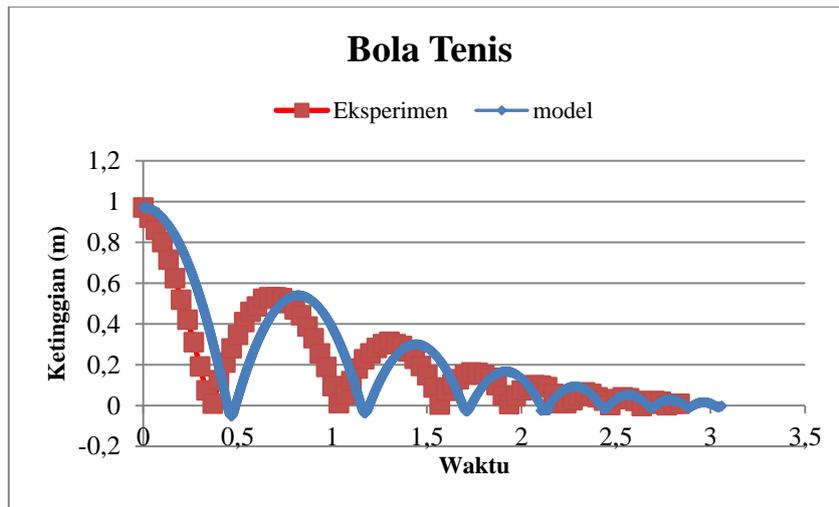
Tabel 1. Besar waktu kontak, koefisien restitusi, γ , dan ω pada setiap jenis bola yang digunakan

No	Jenis Bola	T_{kontak} (s)	e	γ	ω
1	Bola pingpong	0,0213	0,8248	9,027	147,32
2	Bola tenis	0,0430	0,7455	6,830	73,09
3	Bola voli mainan	0,0321	0,8363	5,565	97,87
4	Bola mainan	0,026	0,8495	6,271	120,88

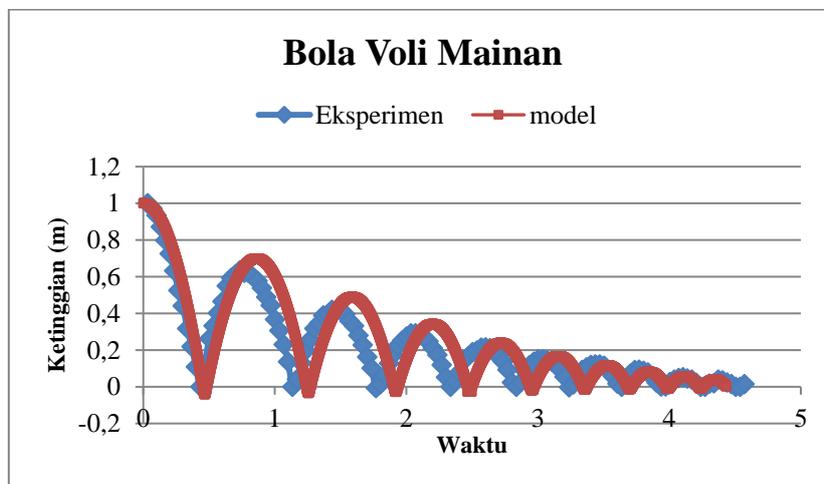
Parameter waktu kontak (T_{kontak}), koefisien restitusi (e), γ , dan ω dari masing-masing bola tersebut selanjutnya dimasukkan kedalam model matematis yang sudah dibuat untuk mengetahui bentuk grafik hasil dari model. Pengolahan data untuk pembuatan grafik model ini dilakukan dengan menggunakan *Visual basic for Applications* (VBA) yang tersedia pada *Microsoft Excel*. Gambar 6 sampai gambar 9 berikut ini menunjukkan perbandingan grafik antara hasil eksperimen dengan grafik model:



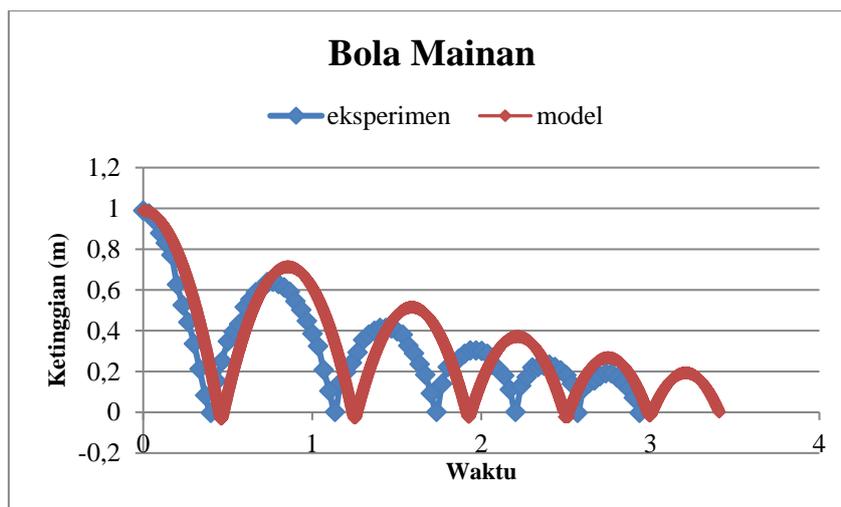
Gambar 6. Grafik perbandingan hasil eksperimen dan model pada bola pingpong



Gambar 7. Grafik perbandingan hasil eksperimen dan model pada bola tenis



Gambar 8. Grafik perbandingan hasil eksperimen dan model pada bola voli mainan



Gambar 9. Grafik perbandingan hasil eksperimen dan model pada bola mainan

Pada eksperimen ini, faktor osilasi diasumsikan jauh lebih besar dibandingkan dengan nilai redamannya, sehingga untuk dapat memenuhi model yang dibuat dapat dilakukan dengan menggunakan bola yang dapat memantul mendekati ketinggian awal pantulannya atau dalam hal ini bola dengan koefisien restitusi mendekati 1. Berdasarkan tabel 1 dapat terlihat bahwa bola yang digunakan sudah memenuhi persyaratan. Walaupun begitu,

pada eksperimen ini masih terdapat ketidaksesuaian hasil yang diperoleh pada eksperimen dengan model matematis seperti terlihat pada gambar 6 sampai gambar 9. Error yang terjadi dapat diperoleh dengan menghitung selisih ketinggian maksimum dari setiap pantulan antara kedua grafik. Besar error pada masing-masing bola dapat dilihat pada tabel 2 berikut ini:

Tabel 2. Nilai error antara hasil eksperimen dan model

No	Jenis Bola	Error (%)
1	Bola pingpong	23,56
2	Bola tenis	12,02
3	Bola voli mainan	10,4
4	Bola mainan	12,38

KESIMPULAN

Secara umum besar error dari seluruh bola bernilai lebih dari 10%, hal tersebut dikarenakan kamera yang digunakan adalah kamera *handphone* berkemampuan 30 *frame per second* (fps) sehingga pengukuran untuk waktu kontak yang diperoleh kurang akurat. Pada eksperimen ini digunakan bola dengan nilai koefisien restitusi yang mendekati 1, hal ini menyebabkan kontak antara bola dan lantai terjadi sangat cepat sehingga diperlukan kamera dengan kemampuan *frame per second* lebih tinggi untuk mendapatkan hasil pengukuran waktu kontak yang lebih akurat.

Selain faktor rendahnya kemampuan kamera dalam merekam, diameter dari pipa yang digunakan pada eksperimen juga turut menjadi penyebab besarnya error. Pada tabel 2 dapat diketahui bahwa error terbesar terjadi pada bola pingpong yaitu sebesar 23%. Besarnya error ini terjadi karena diameter pipa yang digunakan masih terlalu besar jika dibandingkan dengan diameter bola pingpong, sehingga terdapat gaya eksternal yang mengenai bola pingpong akibat interaksinya dengan penyangga. Adanya gaya eksternal ini menyebabkan bola pingpong sempat berotasi tepat sebelum bola tersebut jatuh. Hal tersebut berakibat pada berkurangnya energi dari bola pingpong yang digunakan untuk memantul sehingga tinggi pantulan bola pingpong saat eksperimen berbeda dari hasil pemodelan seperti yang terlihat pada gambar 6.

Kondisi lantai yang tidak rata sempurna juga dapat menjadi penyebab munculnya error dari eksperimen ini. Pembatas antar ubin dapat menjadi penyebab pantulan bola tidak vertical, terutama untuk bola yang memiliki diameter kecil seperti bola pingpong. Akibatnya, nilai percepatan gravitasi bumi (g) yang digunakan pada model belum bisa terpenuhi akibat adanya sudut yang dibentuk ketika bola memantul.

Error pada bola tenis, bola voli mainan dan bola maianan relatif lebih kecil dibandingkan bola pingpong karena faktor-faktor terjadinya kesalahan pada bola pingpong dapat diminimalisasi pada bola-bola tersebut, seperti ukuran pipa yang sesuai dengan diameter bola dan juga ukuran pembatas ubin yang jauh lebih kecil dari diameter bola sehingga tidak berpengaruh pada saat bola mengenai lantai tersebut.

UCAPAN TERIMA KASIH

Penulis mengucapkan terima kasih kepada Dr. Sparisoma Viridi dan Dr. Neny Kurniasih atas diskusi dan bantuannya dalam menyelesaikan makalah ini.

REFERENSI

1. M. Nagurka, 2006. *A mass-Spring-Damper Model of a Bouncing Ball*. Marquette University, Milwaukee USA.
2. Nagurka, M.L, 2003. *Aerodynamic Effect in a dropped ping pong ball experiment*. IJEE, 19(4), pp.623-630.
3. Wu, C., Li, L. And Thornton, C., 2003. *Rebound Behavior of Sphere for Plastic Impac*. IJIE, 28 pp 929-946