

# Perbandingan Inversi Non-Linier Untuk Interpretasi Anomali Self – Potential Model *Fixed Geometry*: Metode *Least-Square*, Gauss-Newton, dan Levenberg-Marquardt

Fajriani\* dan Wahyu Srigutomo

Laboratorium Fisika Bumi,  
Kelompok Keilmuan Fisika Bumi dan Sistem Kompleks,  
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Institut Teknologi Bandung,  
Jl. Ganesha no. 10 Bandung, Indonesia, 40132

\*) fajriani.nst@gmail.com  
wahyu@fi.itb.ac.id

## Abstrak

*Metode self-potential digunakan untuk mengidentifikasi struktur bawah permukaan yang berkaitan dengan model kontinyu maupun model fixed geometry. Dalam model fixed geometry metode SP berkaitan dengan bentuk geometri sederhana seperti bola, silinder, dan lempeng. Implementasi metode ini menentukan nilai parameter model seperti kedalaman, sudut polarisasi, moment dipole listrik dan bentuk geometri benda yang terpendam. Estimasi parameter model menggunakan metode inversi non-linier dengan pendekatan linier least-square menggunakan metode least-square terbobot, Gauss-Newton, dan Levenberg-Marquardt. Ketiga algoritma tersebut diuji menggunakan model sintetik tanpa gangguan dan model yang menggunakan gangguan sebesar 25%. Inversi dari ketiga metode ini menunjukkan hasil perhitungan yang cukup mendekati dengan model sintetik.*

*Kata-kata kunci: Anomali self-potential, least-square terbobot, Gauss-Newton, Levenberg-Marquardt*

## PENDAHULUAN

Metode self-potential (SP) merupakan metode geofisika yang memanfaatkan beda potensial dari sumber kelistrikan alami bumi. Sumber listrik alami biasanya muncul di sekitar bijih sulfida atau grafit akibat dari adanya aktivitas elektrokimia. Nilai anomali SP yang terukur berkisar dari beberapa millivolt (mV) hingga lebih dari 1 volt dengan besar nilainya bisa positif atau negatif. Nilai anomali besar di amplitudo negatif biasanya teramati di daerah yang mengandung mineral. Metode SP biasa digunakan untuk mencari bijih sulfida atau grafit [1]. Selain digunakan dalam investigasi mineral, metode ini juga digunakan untuk hidrologi [2], investigasi aktivitas gunungapi dan sistem panasbumi [3,4], mendeteksi rembesan [5], arkeologi [6], dan mendeteksi keberadaan gua [7].

Dalam eksplorasi geofisika, interpretasi data merupakan hal yang sangat penting. Keakuratan serta ketidakambiguan dalam interpretasi anomali SP juga sama pentingnya. Anomali SP dapat diinterpretasikan secara kualitatif dan kuantitatif. Secara kualitatif, interpretasi anomali SP berdasarkan keberadaan anomali baik dalam bentuk profil lintasan maupun kontur. Interpretasi anomali SP secara kuantitatif menggunakan persamaan matematika, interpretasi ini dibagi menjadi dua kategori yaitu pemodelan kontinyu 2D dan 3D, dan metode *fixed geometry* (bola, silinder horizontal, silinder vertikal dan lempeng). Keuntungan metode *fixed geometry* adalah metode ini hanya membutuhkan data SP saja, dengan intepretasi yang cepat dan akurat.

Banyak metode yang telah dikembangkan oleh para peneliti dalam menginterpretasikan data anomali SP menggunakan persamaan analitik untuk kasus SP *fixed geometry*, untuk memperkirakan parameter model (bentuk, kedalaman, sudut polarisasi, dan moment dipol listrik), beberapa metode tersebut yaitu metode dengan

menggunakan karakteristik titik, jarak, kurva dan nomogram [8], metode *least-square* [9], analisis derivatif dan gradient [10], pendekatan spectral analisis menggunakan fourier transform dan domain bilangan gelombang [11], metode inversi non-linier [12,13].

Dalam tulisan ini, dilakukan perbandingan interpretasi anomali SP menggunakan data sintetis dengan tiga metode yang berbeda yaitu metode least-square terbobot, Gauss-Newton, dan Levenberg-Marquardt. Data sintetis yang diperoleh dari pemodelan kedepan, digunakan sebagai data observasi yang digunakan untuk pemodelan inversi. Pemodelan inversi digunakan untuk memperkirakan parameter model yang mempengaruhi nilai anomali SP yang terukur.

## FORMULASI TEORITIK

### Struktur Geometri Model Bola dan Silinder

Anomali SP yang terukur disepanjang sumbu-x yang diakibatkan oleh benda terpendam model bola dan silinder terpolarisasi dapat dirumuskan sebagai berikut [14]

$$V(x) = K \frac{(x - x_0) \cos \theta + h \sin \theta}{((x - x_0)^2 + h^2)^q} \tag{1}$$

Dengan  $V$  merupakan potensial listrik (Volt),  $K$  merupakan momen dipol listrik (mV),  $h$  merupakan kedalaman pusat benda (m),  $x$  merupakan jarak pengukuran SP (m),  $x_0$  merupakan jarak titik pusat benda dari titik awal pengukuran (m),  $\theta$  merupakan sudut polarisasi yang dibentuk terhadap bidang horizontal benda, dan  $q$  merupakan faktor bentuk yang telah ditetapkan nilainya untuk masing-masing bentuk benda (0.5 untuk silinder vertikal, 1.0 untuk silinder horizontal dan 1.5 untuk bola).

### Struktur Geometri Model Lempeng

Anomali SP yang disebabkan oleh struktur lempeng miring dalam 2D dapat digambarkan dalam lima parameter model, momen dipole listrik  $K = I\rho/2\pi$  ( $I$  adalah rapat arus pada medium (A/m<sup>2</sup>) dan  $\rho$  merupakan resistivitas lempeng ( $\Omega$ m)),  $x$  adalah jarak titik pengukuran,  $x_0$  adalah jarak pusat lempeng dari titik awal pengukuran,  $h$  adalah kedalaman pusat lempeng,  $a$  adalah panjang setengah lempeng (m) dan  $\theta$  merupakan kemiringan lempeng terhadap bidang horizontal. Persamaan anomali SP akibat struktur lempeng dirumuskan sebagai berikut [15,16]

$$V(x) = K \ln \left[ \frac{\{(x - x_0) + a \cos \theta\}^2 + \{h - a \sin \theta\}^2}{\{(x - x_0) - a \cos \theta\}^2 + \{h + a \sin \theta\}^2} \right] \tag{2}$$

Persamaan (1) dan (2) digunakan sebagai perumusan dalam pemodelan kedepan (*forward modeling*), dalam tulisan ini dilakukan pemodelan kedepan untuk model bola, silinder horizontal, dan lempeng.

### Metode Inversi Non-Linier dengan Pendekatan Linier

Secara umum permasalahan inversi dalam geofisika merupakan inversi non-linier, meskipun dalam beberapa kasus permasalahan inversi non-linier dapat dibuat menjadi linier melalui transformasi variable. Namun hal tersebut hanya dapat dilakukan untuk pemodelan non-linier sederhana. Oleh karena itu dikembangkan metode inversi non-linier dengan pendekatan linier

Hubungan antara data dengan parameter model secara umum dinyatakan sebagai berikut [17]:

$$\mathbf{d} = \mathbf{G}(\mathbf{m}) \tag{3}$$

Persamaan (3) ini digunakan untuk menyatakan hubungan antara data dengan parameter model yang direpresentasikan oleh suatu fungsi non-linier. Dalam hal ini  $\mathbf{d}$  merupakan vektor data observasi,  $\mathbf{m}$  merupakan vektor parameter model, dan  $G$  merupakan model matematika yang menghubungkan data dengan parameter model. Parameter model yang tidak linier dapat didekati secara linier dengan memakai ekspansi Taylor orde pertama  $G(\mathbf{m})$  disekitar model awal  $\mathbf{m}_0$ , sehingga persamaan (3) menjadi:

$$\mathbf{d} = G(\mathbf{m}) + \mathbf{J}\Delta\mathbf{m}_0 \tag{4}$$

Persamaan (4) diatas dapat diselesaikan menggunakan metode *least-square*, yaitu dengan mencari solusi  $\Delta \mathbf{m}_0$  yang menghasilkan  $\mathbf{d} - (G(\mathbf{m}) + \mathbf{J}_0 \Delta \mathbf{m}_0)$  minimum, yang artinya kuantitas yang diminimumkan adalah selisih data pengamatan dengan data perhitungan menggunakan pendekatan orde pertama ekspansi taylor. Solusi inversi untuk persamaan (4) adalah

$$\Delta \mathbf{m}_0 = [\mathbf{J}_0^T \mathbf{J}_0]^{-1} \mathbf{J}_0^T (\mathbf{d} - G(\mathbf{m}_0)) \tag{5}$$

Dengan memperhatikan bahwa

$$\Delta \mathbf{m}_0 = [\mathbf{m} - \mathbf{m}_0] \tag{6}$$

maka solusi tersebut diartikan sebagai suatu pertubasi terhadap model awal  $\mathbf{m}_0$  untuk mendapatkan model  $\mathbf{m}$  yang lebih baik. Model yang optimum diperoleh melalui proses modifikasi terhadap model awal secara iteratif menggunakan persamaan (6), sehingga

$$\mathbf{m} = \mathbf{m}_0 + \Delta \mathbf{m}_0 \tag{7}$$

Dalam inversi non-linier menggunakan metode *least-square* terbobot, persamaan solusi inversi diberikan oleh persamaan berikut:

$$\mathbf{m}_{k+1} = \mathbf{m}_k + [\mathbf{J}_k^T \mathbf{w}_e \mathbf{J}_k]^{-1} \mathbf{J}_k^T \mathbf{w}_e (\mathbf{d} - G(\mathbf{m}_k)) \tag{8}$$

dengan  $k$  merupakan jumlah iterasi, dan  $\mathbf{J}$  merupakan matriks Jacobian dengan komponen berupa turunan parsial fungsi selisih data observasi dan data perhitungan terhadap setiap elemen parameter model  $\mathbf{m}$ ,

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1(\mathbf{m})}{\partial m_1} & \dots & \frac{\partial F_1(\mathbf{m})}{\partial m_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_n(\mathbf{m})}{\partial m_1} & \dots & \frac{\partial F_n(\mathbf{m})}{\partial m_m} \end{bmatrix} \tag{9}$$

Notasi  $T$  dalam persamaan menyatakan transpos matriks,  $\mathbf{w}_e$  dalam persamaan (8) adalah matriks pembobot yang merupakan matriks diagonal yang berisi variansi data  $[\mathbf{w}_e] = [\sigma_i^{-2}]$ , pemberian bobot dalam solusi inversi dapat diartikan bahwa data yang tidak terlalu akurat akan memberikan toleransi yang cukup besar pada data prediksi ( $d_{cal}$ ) untuk dianggap cocok dengan data hasil pengamatan, secara lengkap matriks  $\mathbf{w}_e$  adalah:

$$\mathbf{w}_e = \begin{bmatrix} w_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & w_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & w_n \end{bmatrix} \tag{10}$$

Solusi inversi non-linier menggunakan metode Gauss-Newton adalah sebagai berikut:

$$\mathbf{m}_{k+1} = \mathbf{m}_k + [\mathbf{J}_k^T \mathbf{J}_k]^{-1} \mathbf{J}_k^T (\mathbf{d} - G(\mathbf{m}_k)) \tag{11}$$

Model ini menyatakan bahwa model pada iterasi ke  $(k+1)$  adalah model pada iterasi sebelumnya (iterasi ke- $k$ ) yang di-*update* dengan suatu faktor koreksi. Faktor koreksi beroperasi pada selisih antara data pengamatan dengan data perhitungan pada iterasi ke- $k$ .

Dan yang terakhir solusi inversi untuk metode Levenber-Marquard dapat ditulis sebagai berikut:

$$\mathbf{m}_{k+1} = \mathbf{m}_k + [\mathbf{J}_k^T \mathbf{J}_k + \varepsilon^2 \mathbf{I}]^{-1} \mathbf{J}_k^T \mathbf{F}_k \tag{12}$$

$\mathbf{I}$  menyatakan matriks identitas dan  $\varepsilon$  merupakan parameter peredam yang berfungsi meredam ketidakstabilan pada proses inversi dan  $\mathbf{F}_n$  dipersamaan (9) adalah vektor dari selisih antara data observasi dan data perhitungan, yang dapat ditulis sebagai berikut:

$$\mathbf{F}(\mathbf{m}) = \begin{bmatrix} f_1(\mathbf{m}) \\ \vdots \\ f_n(\mathbf{m}) \end{bmatrix} \tag{13}$$

dimana

$$f_i(\mathbf{m}) = \sum_{i=1}^n \frac{G(\mathbf{m}) - \mathbf{d}_i}{\sigma_i} \tag{14}$$

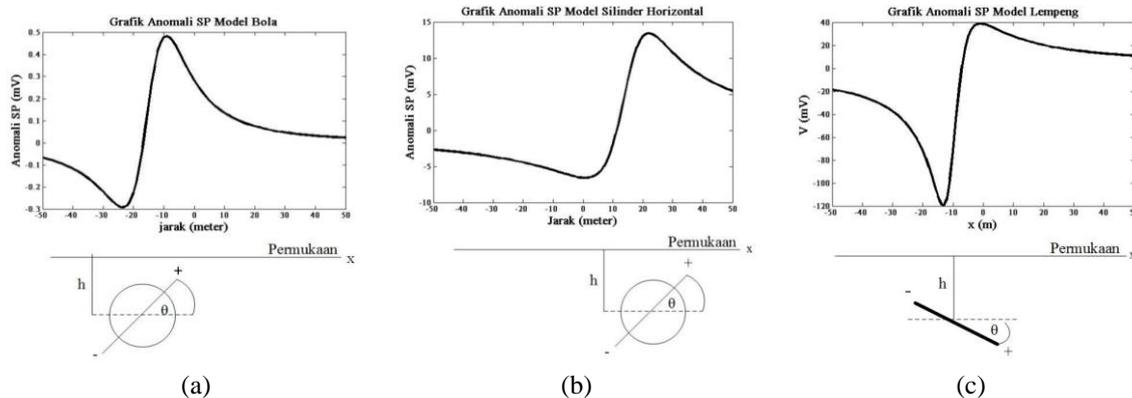
**PEMODELAN KEDEPAN (*FORWARD MODELING*)**

Untuk melakukan tahap inversi dibutuhkan data observasi yang digunakan sebagai data perbandingan terhadap data perhitungan, dalam hal ini data observasi diperoleh dari hasil *forward modeling* yang disebut sebagai data sintetik. Anomali SP sintetik yang dimodelkan adalah anomali yang disebabkan oleh struktur benda berbentuk bola, silinder horizontal dan lempeng yang terpolarisasi dibawah permukaan. Dengan menentukan nilai untuk tiap parameter model untuk masing-masing benda terlebih dahulu dan menggunakan persamaan untuk anomali SP pada persamaan (1) dan (2) maka diperoleh hasil *forward modeling* sebagai berikut:

Tabel 1. Parameter asumsi model sintetik untuk model bola, silinder horizontal, dan lempeng terpolarisasi

Paremeter model	K (mV)	q	h (m)	x <sub>0</sub> (m)	θ (°)
Bola	100	1.5	10	-15	10
Silinder horizontal	200	1.0	10	15	20
Paremeter model	K (mV)	a (m)	h (m)	x <sub>0</sub> (m)	θ (°)
Lempeng	100	2	5	-10	30

Dengan menggunakan parameter yang telah ditentukan di tabel 1, melalui *forward modeling* menggunakan persamaan (1) dan (2), maka diperoleh data observasi dari model sintetik sebagai berikut



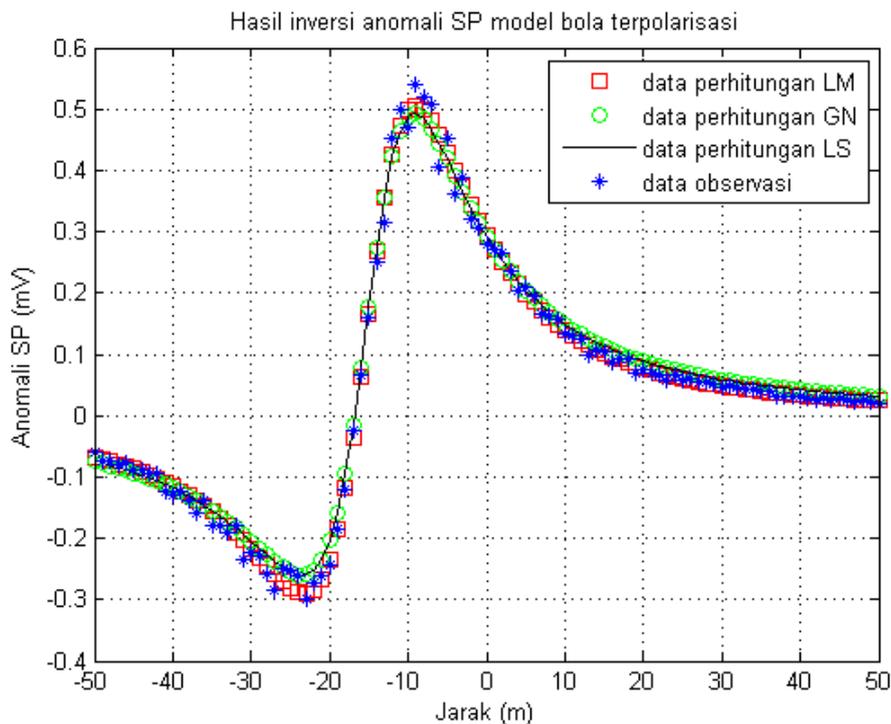
Gambar 1. Anomali SP hasil *forward modeling* yang disebabkan oleh model (a) bola, (b) silinder horizontal, (c) lempeng

Selanjutnya data observasi model sintetik ini digunakan untuk menentukan kembali nilai parameter model asumsi melalui proses inversi. Dalam pengujian metode inversi digunakan dua data observasi, yaitu data observasi tanpa gangguan dan data observasi yang telah diberi gangguan sebesar 25%.

**HASIL DAN PEMBAHASAN**

**Perbandingan Hasil Perhitungan dengan Data Observasi**

Untuk melihat kecocokan hasil perhitungan inversi, berikut ini ditampilkan hasil inversi dari masing-masing model benda terpolarisasi, dan nilai hasil perhitungan untuk tiap parameter ( $K, h, \theta, x_0, q$ , dan  $a$ ).



Gambar 2. Hasil inversi data sintetik model bola terpolarisasi.

Data dari hasil *forward modeling* yang dijadikan sebagai data observasi untuk model bola terpolarisasi nilai anomali SP yang dihasilkan sangat kecil berkisar antara -0.3 mV sampai 0.5 mV. Meskipun nilai momen dipol yang diberikan besar hingga 100 mV namun nilai anomali yang terukur dari hasil *forward* sangat kecil. Nilai anomali tersebut juga dipengaruhi oleh nilai kedalaman yang diberikan. Dari hasil inversi anomali SP model bola terpolarisasi (gambar 2), terlihat ketiga metode berhasil mengikuti pola kurva anomali data observasi.

Tabel 2. Perbandingan hasil interpretasi anomali SP data sintetik akibat bola terpolarisasi tanpa noise

Inversi	K (mV)	h (m)	$\theta$ (°)	q	xo (m)	waktu (s)	iterasi
Metode LS	100.00000	10.00000	10.00000	1.50000	-15.00000	0.059579	501
Metode GN	43.66691	9.32505	12.34000	1.37127	-14.89925	0.202282	87
Metode LM	100.00000	10.00000	10.00000	1.50000	-15.00000	0.047031	25

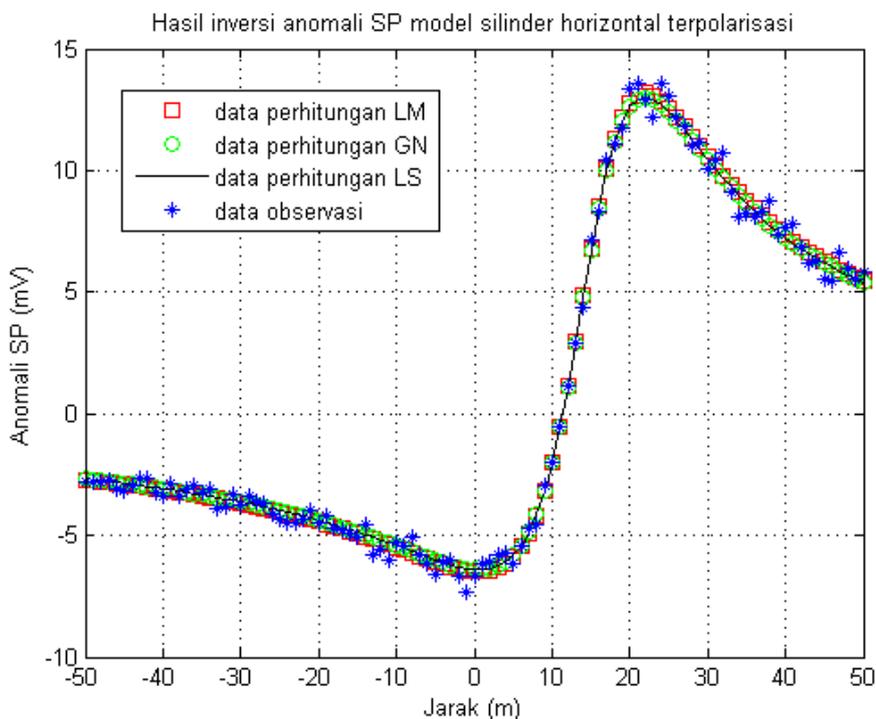
Tabel 3. Perbandingan hasil interpretasi anomali SP data sintetik akibat bola terpolarisasi dengan noise 25%

Inversi	K (mV)	h (m)	$\theta$ (°)	q	xo (m)	waktu (s)	iterasi
Metode LS	89.73501	9.76286	11.22689	1.48302	-14.69443	0.266652	501
Metode GN	39.38723	9.10969	13.87382	1.35274	-14.57900	0.198771	86
Metode LM	89.73500	9.76286	11.22689	1.48302	-14.69443	0.052453	25

Hasil inversi dari data observasi model bola terpolarisasi tanpa gangguan menggunakan metode *least-square*, Gauss-Newton, dan Levenberg-Marquardt ditunjukkan pada tabel 2. Terlihat bahwa nilai parameter yang diperoleh dari hasil perhitungan menggunakan metode *least-square* dan Levenberg-Marquardt menunjukkan hasil yang sama dengan nilai asumsi awal, sedangkan metode GN menghasilkan nilai parameter estimasi yang jauh dari nilai parameter yang diasumsikan. Walaupun metode *least-square* dan LM menghasilkan nilai yang tepat sama dengan nilai parameter asumsi, namun terlihat adanya perbedaan jumlah

iterasi diantara dua metode tersebut, jumlah iterasi dari metode LM jauh lebih sedikit dibandingkan dengan metode *least-square*.

Pada tabel 3. perbandingan hasil inversi dari ketiga metode menunjukkan nilai parameter model yang berdekatan dengan nilai parameter asumsi. Namun masih terlihat bahwa metode *least-square* dan LM yang paling mendekati dengan parameter asumsi.



Gambar 3. Hasil inversi data sintetik model silinder horizontal terpolarisasi

Sama halnya dengan anomali SP model bola terpolarisasi, anomali SP untuk model silinder horizontal juga relatif kecil berkisar diantara -6 mV sampai 13 mV, nilai anomali lebih besar dari pada model bola dikarenakan pemberian nilai momen dipol untuk model silinder dua kali lipat lebih besar dari model bola (gambar 3). Dari hasil inversinya terlihat ketiga metode berhasil mengikuti pola kurva anomali data observasi.

Tabel 4. Perbandingan hasil interpretasi anomali SP data sintetik akibat silinder horizontal terpolarisasi tanpa *noise*

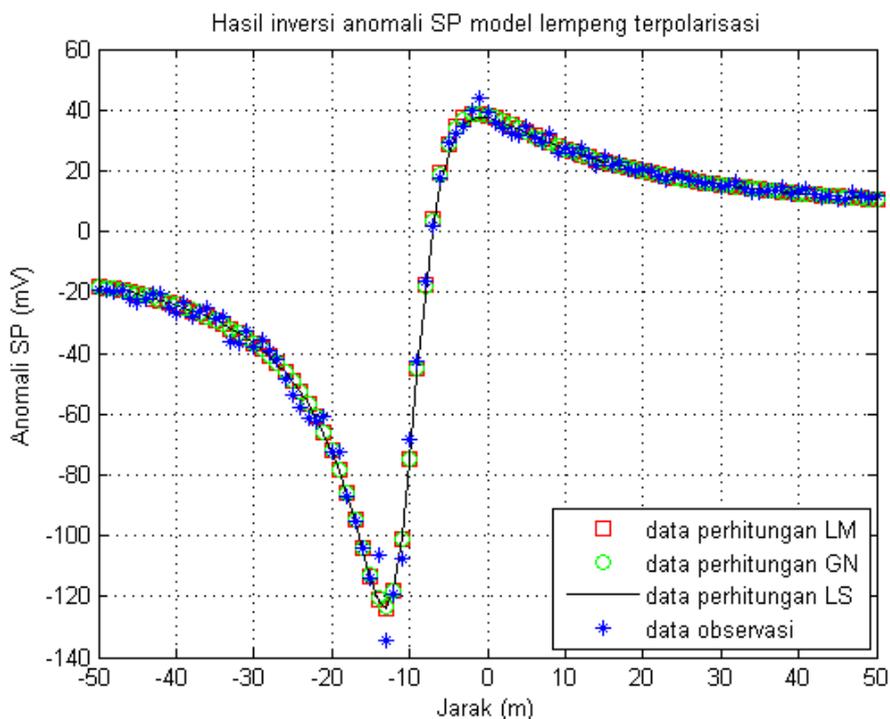
Inversi	K (mV)	h (m)	$\theta$ (°)	q	xo (m)	waktu (s)	iterasi
Metode LS	199.71044	10.00004	20.00029	1.00000	15.00009	0.187618	67
Metode GN	198.18694	9.99065	20.03521	0.99840	14.99951	0.176839	77
Metode LM	200.00000	10.00000	20.00000	1.00000	15.00000	0.048564	35

Tabel 5. Perbandingan hasil interpretasi anomali SP data sintetik akibat silinder horizontal terpolarisasi dengan *noise* 25%

Inversi	K (mV)	h (m)	$\theta$ (°)	q	xo (m)	waktu (s)	iterasi
Metode LS	183.55034	10.00261	19.61521	0.98884	14.80373	0.137468	46
Metode GN	178.06205	9.95574	19.77288	0.98135	14.80031	0.149090	62
Metode LM	185.59372	9.99906	19.60529	0.98873	14.80221	0.046792	30

Hasil inversi dari data observasi model silinder horizontal terpolarisasi tanpa gangguan ditunjukkan pada tabel 4. Terlihat bahwa nilai parameter yang diperoleh dari hasil perhitungan menggunakan metode *least-square*, dan GN menunjukkan hasil yang mendekati dengan nilai asumsi awal, sedangkan hasil perhitungan dengan metode LM menghasilkan nilai parameter estimasi yang sama dengan nilai parameter yang diasumsikan. Dari ketiga metode tersebut diperoleh jumlah iterasi yang paling sedikit yaitu metode LM

Hasil inversi dari data observasi model silinder horizontal terpolarisasi dengan gangguan 25% (tabel 5), hasil inversi dari ketiga metode menunjukkan nilai parameter model yang berdekatan dengan nilai parameter asumsi.



Gambar 4. Hasil inversi data sintetik model lempeng terpolarisasi

Sama halnya seperti kurva hasil inversi model bola dan silinder horizontal terpolarisasi, pada inversi model lempeng terpolarisasi, hasil inversi model lempeng terpolarisasi (gambar 4) juga memperlihatkan hasil perhitungan dari ketiga metode berhasil mengikuti pola anomali SP dari data observasi dengan baik. Hasil *forward* menunjukkan nilai anomali SP untuk model lempeng dengan nilai parameter yang telah diberikan di tabel 1 berkisar diantara -120 mV hingga 40 mV, anomali SP ini lebih besar rentangnya dibandingkan dengan dua model sebelumnya. Hasil perhitungan ditunjukkan pada tabel berikut:

Tabel 6. Perbandingan hasil interpretasi anomali SP data sintetik akibat lempeng terpolarisasi tanpa *noise*

Inversi	k (mV)	a (m)	h (m)	xo (m)	$\theta$ (°)	waktu (s)	iterasi
Metode LS	94.21057	2.12788	5.01681	-9.97919	30.16615	0.349864	640
Metode GN	99.93661	2.00189	5.00284	-10.00021	30.00684	0.240160	83
Metode LM	100.00000	2.00000	5.00000	-10.00000	30.00000	0.064292	62

Tabel 7. Perbandingan hasil interpretasi anomali SP data sintetik akibat lempeng terpolarisasi dengan *noise* 25%

Inversi	k (mV)	a (m)	h (m)	xo (m)	$\theta$ (°)	waktu	iterasi
Metode LS	101.5126	1.95662	4.88842	-10.04991	31.47042	0.300233	537
Metode GN	127.64818	1.55723	4.93061	-10.13548	31.22228	0.157441	51
Metode LM	124.09548	1.58893	4.83070	-10.11968	31.03609	0.066978	63

Dilihat dari hasil perbandingan inversi pada model lempeng terpolarisasi tanpa gangguan (tabel 6), metode LM berhasil memperoleh parameter model yang sama nilainya dengan parameter asumsi, untuk metode *least-square* dan GN keduanya memperoleh hasil yang mendekati dengan parameter asumsi. Namun dalam perhitungan parameter, metode *least-square* paling banyak melakukan iterasi dibandingkan dua metode lainnya.

Hasil inversi untuk model lempeng terpolarisasi yang telah diberi gangguan sebesar 25% (tabel 7), ketiga metode menunjukkan hasil yang mendekati dengan nilai parameter asumsi, diantara ketiganya terlihat bahwa metode *least-square* yang paling mendekati dengan nilai asumsi namun metode ini banyak melakukan iterasi.

**Waktu Komputasi dan Standar Error**

Ketiga metode inversi diatas dioperasikan menggunakan *software* MATLAB R2013a, dapat dilihat dari tabel perbandingan hasil (tabel 2 – tabel 7), rata-rata metode inversi ini membutuhkan waktu yang sangat singkat dalam proses pengoperasian programnya. Dilihat dari waktu rata-ratanya, dari ketiga metode, metode LM yang membutuhkan waktu paling singkat yaitu sekitar 0.054 detik, metode GN membutuhkan waktu sekitar 0.187 detik, dan metode *least-square* terbobot membutuhkan waktu 0.216 detik dalam proses inversi.

Untuk melihat kecocokan data perhitungan dengan data observasi untuk masing-masing metode diatas, maka digunakan *standard error* yang dinyatakan dalam persamaan

$$SE = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n [D_{obs} - D_{cal}]^2}{n - m}} \tag{15}$$

Dengan  $D_{obs}$  adalah data observasi,  $D_{cal}$  adalah data hasil perhitungan,  $n$  adalah jumlah data berdasarkan jumlah titik pengukuran dan  $m$  adalah jumlah parameter yang akan diperkirakan nilainya. Berikut ini ditampilkan nilai  $SE$  dari hasil perhitungan inversi untuk masing-masing data observasi model bola, silinder horizontal, dan lempeng terpolarisasi.

Tabel 8. Nilai SE untuk masing-masing metode

Metode	Model bola		Model silinder horizontal		Model lempeng	
	Tanpa noise	Noise 25%	Tanpa noise	Noise 25%	Tanpa noise	Noise 25%
<i>Least-square</i> terbobot	1.5192e-12	3.9557e-05	7.9755e-05	0.0070	4.5727e-05	0.0093
Gauss-Newton	6.7620e-05	1.1503e-04	1.3528e-04	0.0057	2.1184e-05	0.0091
Levenberg-Marquardt	1.9599e-11	3.9557e-04	3.6246e-12	0.0063	3.9491e-06	0.0956

Dari tabel 8 diatas, ketiga metode memiliki nilai  $SE$  yang relatif semuanya kecil, di data observasi yang tanpa noise terlihat hasil perhitungan menggunakan metode LM dominan menunjukkan hasil  $SE$  yang lebih kecil dari dua metode lainnya dan untuk data observasi dengan tambahan noise sebesar 25% menunjukkan ketiga metode menghasilkan  $SE$  yang relatif sama.

**KESIMPULAN**

Metode inversi non-linier dengan pendekatan linier yaitu metode *least-square* terbobot, Gauss-Newton, dan Levenberg-Marquardt telah diuji dalam interpretasi anomali SP untuk memperkirakan parameter model yang berkaitan (momen dipol listrik, faktor bentuk, kedalaman pusat benda, jarak titik pusat benda dari titik pengukuran, sudut polarisasi/sudut kemiringan lempeng, dan panjang setengah lempeng) dengan menggunakan data sintetik. Hasil yang diperoleh dari ketiga metode menunjukkan bahwa berdasarkan pengamatan kurva ketiga metode ini mampu mengikuti pola anomali SP dengan sangat baik. Metode *least-square* terbobot dan LM jauh lebih baik daripada metode GN, hal ini dikarenakan adanya faktor pembobot pada metode *least-square* terbobot dan faktor peredam pada metode LM membantu proses inversi untuk memperoleh nilai selisih dari data observasi dan data perhitungan (*misfit*) mencapai minimum. Dari hasil perhitungan untuk masing-masing parameter dapat disimpulkan bahwa dari ketiga metode yang telah diuji, metode LM yang paling mendekati nilai dari parameter model data observasi, metode *least-square* terbobot juga menghasilkan perhitungan yang mendekati nilai parameter data observasi namun memiliki jumlah iterasi yang banyak sehingga waktu komputasi yang dibutuhkan lebih lama dari metode LM.

## UCAPAN TERIMA KASIH

Penulis mengucapkan terima kasih kepada anggota WS Channel Lab. Pemodelan dan Inversi atas saran dan masukan ide-ide dalam penulisan makalah ini. Penulis juga berterima kasih kepada M. Heriyanto dan M. Hairil yang bersedia berbagi ilmu dan membantu memperbaiki kodingan komputasi dalam penelitian ini.

## REFERENSI

1. J. Milsom, *Field geophysics the geological field guide series third edition*, John Wiley & Sons Ltd, England, 117-126 (2003)
2. Z. Wanfang, B. F. Beck, dan J. B. Stephenson, *Investigation of groundwater flow in karst areas using component separation of natural potential measurements*. *Environmental Geology*, **37** 19-25 (1998)
3. F. Fagerlund dan G. Heinson, G., *Detecting subsurface groundwater flow in fractured rock using self-potential (SP) methods*. *Environmental Geology*, **43**, 782-794 (2003)
4. T. Hashimoto, dkk, *Self-potential studies in volcanic areas (5) Rishiri, Kusatsu-Shirane, and White Island*, *Geophysics*, Vol. **12**, No. 2, 97-113 (2004)
5. T.V Panthulu, C. Krishnaiah, dan J. M. Shirke, *Detection of seepage paths in earth dams using self-potential and electrical resistivity methods*: *Engineering Geology*, **59**, 281-295, doi: 10.1016/S0013-7952(00)00082-X (2001)
6. M. G. Drahor, *Application of the self-potential method to archaeological prospection: some case histories*. *Archaeol. Prospect.* **11**, 77-105 (2004)
7. Y. Vichabian, dan F. D. Morgan, *Self potentials in cave detection*. *The Leading Edge*, 866-871, doi: 10.1190/1.1508953 (2002)
8. B. B. Bhattacharya, dan N. Roy, *A note on the use of a nomogram for self-potential anomalies*. *Geophysics Prospecting*, **29**, 102-107 (1981)
9. E. M. Abdelrahman, H. S. Saber, K. S. Essa, M. A. Fouda, *A least-square approach to depth determination from numerical horizontal self-potential gradients*. *Pure and applied geophysics*, **161**, 399-411 (2004)
10. E. M Abdelrahman, A.A Ammar, H.I. Hassanein, Hafez,M.A, *Derivative analysis of SP anomalies*, *Geophysics*, **63**, 890-897 (1998)
11. D.A. Rao, H. V. R. Babu, dan G. D. J. S. Sinha, *A fourier transform method for the interpretation of self-potential anomalies due to two-dimensional inclined sheets of finite depth extent*. *Pageoph*, **120**, 355-374 (1982)
12. W. Srigutomo, E. Agustine, dan M. H. Zen, *Quantitative analysis of self-potential anomaly: derivative analysis, least-square method and non-linear inversion*. *Indonesian Journal of Physics*, **17**, 49-55 (2006)
13. S. P. Sharma, dan A. Biswas, *Interpretation of self-potential anomaly over a 2D inclined structure using very fast simulated-annealing global optimization – an insight about ambiguity*. *Geophysics*, **78**, wb3-wb15 (2013)
14. E. M. Abdelrahman dan S. M. Sharafeldin, *A least-square approach to depth determination from self-potential anomalies caused by horizontal cylinders and spheres*. *Geophysics*, Vol. **62**, P.44-48 (1997)
15. M. K. Paul, S. Data, dan B. Banerjee, *Interpretation of SP anomalies due to localized causative bodies*. *Pure and Applied Geophysics*, **61**, 95-100 (1965)
16. Murthy, B. V. S. and P. Haricharan, *Nomogram for the complete interpretation of spontaneous potential profiles over sheet-like and cylindrical two-dimensional source*. *Geophysics*, Vol. **50**, 1127-1135 (1985)
17. H. Grandis, *Pengantar pemodelan inversi geofisika, Himpunan Ahli Geofisika Indonesia (HAGI)*, Institut Teknologi Bandung (2009)