

Studi Komputasi Pengaruh *Critical Shear Stress* pada Proses Abrasi dengan Metode Smoothed Particle Hydrodynamics

Haerul Jusmar Ibrahim^{1,a)}, Suprijadi^{2,b)}

¹Program Studi Magister Sains Komputasi,
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Institut Teknologi Bandung,
Jl. Ganesha no. 10 Bandung, Indonesia, 40132

²Kelompok Keilmuan Fisika Teori Energi Tinggi dan Instrumentasi,
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Institut Teknologi Bandung,
Jl. Ganesha no. 10 Bandung, Indonesia, 40132

^{a)} haerul.jusmar@gmail.com (corresponding author)

^{b)} supri@fi.itb.ac.id

Abstrak

Metode Smoothed Particle Hydrodynamics merupakan metode dengan pendekatan Lagrangian yang dapat digunakan dalam pemecahan masalah dinamika fluida yang kompleks. Perhitungan numerik pada metode ini cukup mudah dan dapat diimplementasikan pada berbagai macam syarat batas. Metode ini menggunakan partikel yang mewakili elemen-elemen fluida yang saling berinteraksi. Pada penelitian ini, interaksi yang terjadi berupa interaksi partikel fluida dan fluida serta fluida dan padatan seperti dalam proses abrasi oleh ombak laut. Proses abrasi dalam penelitian ini diasumsikan tanpa melibatkan proses transportasi dan sedimentasi. Partikel padatan dianggap bersifat seperti fluida pseudo-plastic yang dapat berubah bentuk ketika diberikan shear stress yang cukup. Shear stress minimum yang menyebabkan terjadinya abrasi dinyatakan melalui parameter critical shear stress. Dari hasil simulasi yang dilakukan, diketahui bahwa variasi nilai critical shear stress mempengaruhi persentase partikel yang tererosi.

Kata-kata kunci: Smoothed Particle Hydrodynamics, shear stress, pseudo-plastic, abrasi

PENDAHULUAN

Komputasi dinamika fluida memiliki peranan penting dalam penyelesaian masalah ilmu pengetahuan, industri, lingkungan dan studi kebencanaan. Dalam studi kebencanaan, salah satu fenomena yang sering ditemukan yaitu permasalahan abrasi atau yang sering disebut erosi pantai. Pada kasus ini, interaksi antara fluida dan padatan menjadi hal utama dalam simulasi yang dilakukan.

Penelitian pada kasus abrasi telah banyak dilakukan oleh para peneliti untuk lebih dari satu dekade. Pada pengembangan awal, Musgrave, dkk [1] pada tahun 1989 memodelkan bagaimana air larut, mengangkut dan mengendap dalam tanah berdasarkan sedimentasi dan ketinggian lahan. Sama halnya dengan yang dilakukan oleh Krištof, dkk [2] pada tahun 2009 yang mengembangkan metode transfer sedimen antar partikel SPH dan partikel *boundary*. Pengembangan berikutnya juga dilakukan oleh Zhongxian [3] pada tahun 2010 dengan menggunakan model ketinggian lahan yang tersegmentasi dan terbuat dari material yang berbeda.

Banyak metode numerik yang dapat digunakan dalam menyelesaikan permasalahan dalam dinamika fluida seperti *finite difference*, *finite element* ataupun *finite volume*. Ketiga metode tersebut menggunakan pendekatan dengan grid *Eulerian* dengan titik-titik pada posisi yang tetap untuk merepresentasikan entitas dari fluida. Pada penelitian ini, digunakan pendekatan grid *Lagrangian* dengan representasi fluida sebagai

partikel-partikel yang bergerak bersama dengan medan. Dengan pendekatan *Lagrangian*, perhitungan numerik dapat dengan mudah dilakukan untuk berbagai macam interaksi maupun *boundary conditions* yang diberikan. Salah satu metode yang menggunakan pendekatan *Lagrangian* yaitu metode *Smoothed Particle Hydrodynamics* (SPH) yang dikembangkan pada tahun 1977 oleh Gingold dan Monaghan [4] serta Lucy [5]. Metode SPH merupakan metode alternatif yang pertama kali digunakan dalam permasalahan pada bidang astrofisika. Sampai saat ini, metode SPH sering digunakan untuk menyelesaikan berbagai kasus dalam dinamika fluida untuk fluida kompresibel maupun inkompresibel.

Dalam penelitian ini, model yang dibuat yaitu model proses abrasi yang tanpa melibatkan proses sedimentasi dan transportasi. Dengan penyederhanaan yang dilakukan yaitu interaksi antara fluida dan padatan menyebabkan terjadinya erosi. Ketika partikel padatan tererosi, maka partikel padatan terlepas dari struktur padatan dan hilang tanpa mengalami proses sedimentasi dan transportasi oleh partikel fluida. Adanya ombak yang destruktif yang dimodelkan dengan asumsi *boundary* yang bergerak untuk menghasilkan ombak. Partikel padatan yang tererosi diasumsikan bersifat *pseudo-plastic* yaitu akan mengalami deformasi jika diberikan *shear stress* yang cukup. Dilakukan variasi *critical shear stress* τ_c untuk melihat pengaruhnya dalam proses abrasi.

SMOOTHED PARTICLE HYDRODYNAMICS

Dasar-dasar SPH

Metode SPH dikembangkan berdasarkan metode interpolasi menggunakan sebuah fungsi untuk menentukan pergerakan partikel [6,7]. Integral interpolasi dari suatu fungsi $A(r)$ yang didefinisikan sebagai berikut

$$A_I(r) = \int A(r')W(r-r',h)dr', \tag{1}$$

dengan integrasi di seluruh ruang dari W adalah fungsi kernel yang ternormalisasi sebagai berikut

$$\int W(r-r',h)dr = 1. \tag{2}$$

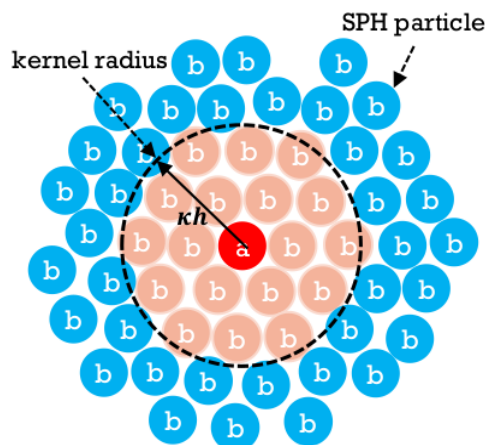
Bentuk fungsi kernel W juga harus memenuhi

$$\lim_{h \rightarrow \infty} W(r-r',h)dr = \delta(r-r'). \tag{3}$$

Persamaan (1) dapat diaproksimasi ke dalam bentuk penjumlahan diskrit seperti pada persamaan berikut

$$A(r) = \sum_b \frac{m_b}{\rho_b} A_b W(r-r_b,h), \tag{4}$$

dengan indeks b menunjukkan partikel ke- b dan penjumlahan dilakukan untuk semua partikel. Partikel b memiliki massa m_b , posisi r_b , densitas ρ_b dan nilai dari suatu kuantitas A pada posisi r_b didefinisikan sebagai A_b . Pada proses penjumlahan, dilakukan penjumlahan hanya untuk partikel tetangga yang berada pada jarak h tertentu dari partikel pusat seperti pada gambar 1. Sebaran partikel b yang bertetangga dengan partikel a pada radius kernel sebesar κh dengan $\kappa = 3$ digunakan pada penelitian ini. Seterusnya indeks a dan b digantikan dengan indeks i dan j .



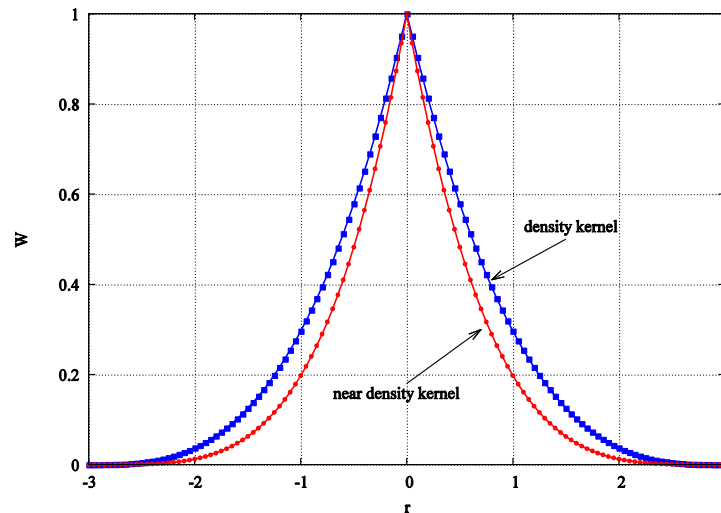
Gambar 1. Partikel SPH dengan radius sebesar κh .

Fungsi kernel W merupakan fungsi yang dapat diturunkan, sehingga persamaan (4) dapat dituliskan ke dalam bentuk ∇A dan $\nabla^2 A$ sebagai berikut

$$\nabla A(r) = \sum_b \frac{m_b}{\rho_b} A_b \nabla W(r - r_b, h), \tag{5}$$

$$\nabla^2 A(r) = \sum_b \frac{m_b}{\rho_b} A_b \nabla^2 W(r - r_b, h). \tag{6}$$

Fungsi kernel W memiliki peranan penting dalam metode SPH. Nilai kuantitas A pada persamaan (4) akan dipengaruhi oleh jumlah tetangga dan jarak masing-masing partikel tetangga yang bobotnya dapat dihitung menggunakan fungsi kernel.



Gambar 2. Fungsi kernel W dan W^{near} .

Pada penelitian ini digunakan fungsi kernel seperti yang digunakan pada [8] sebagai berikut

$$W(r_{ij}, h) = \begin{cases} \left(1 - \frac{|r_{ij}|}{h}\right)^3 & 0 > |r_{ij}| < h \\ 0 & |r_{ij}| > h \end{cases}, \tag{7}$$

dengan $r_{ij} = r_i - r_j$. Selain menggunakan fungsi tersebut, ditambahkan fungsi kernel lain dengan orde yang lebih tinggi untuk menghitung kuantitas dari tetangga partikel terdekat sebagai berikut

$$W^{near}(r_{ij}, h) = \begin{cases} \left(1 - \frac{|r_{ij}|}{h}\right)^4 & 0 > |r_{ij}| < h \\ 0 & |r_{ij}| > h \end{cases}. \tag{8}$$

Skema yang menggunakan dua buah fungsi kernel ini disebut *Double Density Relaxation* untuk *incompressibility* dan *anti-clustering* partikel selama simulasi. Bentuk fungsi kernel pada persamaan (7) dan (8) ditunjukkan pada gambar 2.

Aproksimasi Partikel SPH

Jika kuantitas A pada persamaan (4) adalah densitas ρ , maka untuk menentukan densitas partikel ke- i pada titik r dapat dituliskan dalam bentuk berikut

$$\rho_i = \sum_j m_j W(r_{ij}, h), \tag{9}$$

$$\rho_j^{near} = \sum_j m_j W^{near}(r_{ij}, h). \tag{10}$$

Untuk menghitung tekanan dalam penelitian ini digunakan persamaan gas ideal [kelager] yang telah dimodifikasi seperti yang ditunjukkan pada persamaan berikut

$$P_i = k(\rho_i - \rho_0), \tag{11}$$

dengan ρ_0 adalah *rest density* dari fluida dan k adalah parameter *stiffness*. Pada penerapannya, sering ditemukan terjadinya *clustering* pada daerah yang bertekanan tinggi. Hal ini terjadi ketika berada pada kondisi $\nabla W \rightarrow 0$ ketika $|r_{ij}| \rightarrow 0$ sehingga ditambahkan perhitungan tekanan pada tetangga terdekat sebagai berikut

$$P_i^{near} = k^{near} \rho_i^{near}, \tag{12}$$

dengan nilai $k = 0.01$ dan $k^{near} = 0.3$ digunakan pada penelitian ini untuk hasil yang lebih stabil pada saat simulasi.

Dalam dinamika fluida, persamaan yang sering digunakan untuk menyelesaikan berbagai kasus yaitu persamaan Navier-Stokes seperti berikut

$$\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + v \cdot \nabla v \right) = -\nabla P + \mu \nabla^2 v + \rho g + f, \tag{13}$$

dengan kecepatan v , densitas ρ , tekanan P , viskositas μ dan gravitasi g . Persamaan (13) menggambarkan hubungan antara gaya-gaya internal dan eksternal yang bekerja terhadap fluida (gaya akibat perbedaan tekanan, gaya viskos, gaya gravitasi, *surface tension* serta gaya-gaya interaksi lainnya) dan percepatan total dari fluida. Selain persamaan Navier-Stokes, dalam dinamika fluida sering disertakan persamaan kontinuitas dalam penyelesaian masalah seperti berikut

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho v = 0. \tag{14}$$

Persamaan (13) dapat diselesaikan dengan menggunakan pendekatan Lagrangian. Dengan pendekatan Lagrangian dapat diketahui bahwa dengan partikel fluida yang bergerak bersama dengan medan maka $\nabla \cdot v = 0$, sehingga persamaan (13) hanya bergantung waktu dan dapat dinyatakan ke dalam bentuk eksplisit sebagai berikut

$$\frac{dv_i}{dt} = -\frac{\nabla P_i}{\rho_i} + \frac{\mu}{\rho_i} \nabla^2 v_i + g + \frac{f_i}{\rho_i}. \tag{15}$$

Dengan bentuk eksplisit, maka persamaan (15) dapat diselesaikan dengan mudah yaitu dengan menghitung secara langsung komponen yang berada pada bagian kanan persamaan. Untuk menghitung gaya akibat perbedaan tekanan dapat digunakan persamaan berikut

$$\frac{dv_i^{pres}}{dt} = -\frac{m_j}{2\rho_j} \sum_j \left((P_i + P_j) \nabla W(|r_{ij}|, h) + (P_i^{near} + P_j^{near}) \nabla W^{near}(|r_{ij}|, h) \right) \frac{r_{ij}}{|r_{ij}|}, \tag{16}$$

dengan

$$\nabla W(|r_{ij}|, h) = \frac{r_{ij}}{|r_{ij}|} \frac{\partial W}{\partial r}. \tag{17}$$

Pada persamaan (9), ditambahkan komponen tekanan dengan menggunakan persamaan (12) untuk memberikan gaya tolak pada partikel yang berada pada tetangga yang berjarak dekat untuk kestabilan dari hasil simulasi.

Untuk menghitung gaya viskos pada persamaan (15) digunakan turunan kedua dari fungsi kernel. Hal ini mempunyai kekurangan dalam penerapannya yaitu partikel akan mengalami ketidakteraturan pada saat simulasi [7]. Oleh karena itu, dibutuhkan perlakuan khusus untuk mengurangi dampak tersebut. Pada penelitian ini, digunakan skema yang mirip dengan *Artificial Viscosity* yang terdapat pada [6,7,9]. Bentuk persamaan yang digunakan untuk menghitung gaya viskos pada penelitian ini sebagai berikut

$$\frac{dv_i^{vis}}{dt} = \sum_j \left(1 - \frac{|r_{ij}|}{h} \right) \left(\frac{\alpha u + \beta u^2}{2} \right) \hat{r}_{ij}, \tag{18}$$

dengan

$$u = (v_i - v_j) \cdot \hat{r}_{ij}. \tag{19}$$

Pada persamaan (18), diketahui bahwa jika α diperbesar maka akan diperoleh perilaku partikel yang sangat viskos dan komponen β untuk menghindari interpenetrasi antar partikel. Dalam hal ini, digunakan $\alpha = 0.5$ dan $\beta = 1$ pada simulasi.

Surface tension dapat dihitung dengan menggunakan persamaan berikut

$$\frac{dv_i^{surf}}{dt} = -\frac{\sigma}{m_i} \sum_j m_j \nabla W(|r_{ij}|, h) (r_i - r_j). \tag{20}$$

Persamaan (20) seperti yang terdapat pada [10,11] yang merupakan bentuk penyederhanaan dari berbagai cara untuk menghitung *Surface Tension*. Dengan nilai $\sigma = 10^{-4}$ diperoleh hasil yang lebih stabil selama simulasi.

Representasi Fisis Abrasi

Abrasi yang sering disebut erosi pantai merupakan suatu fenomena yang sering dijumpai di daerah pesisir pantai. Banyak faktor yang menjadi penyebab terjadinya abrasi, maka untuk menyederhanakan kasus tersebut dalam penelitian ini pengamatan dilakukan pada proses abrasi yang disebabkan oleh ombak laut yang destruktif. Model proses abrasi yang digunakan tanpa melibatkan proses sedimentasi dan transportasi. Proses abrasi hanya terjadi ketika partikel padatan dan partikel fluida berinteraksi. Diasumsikan bahwa partikel padatan yang mengalami abrasi bersifat seperti padatan yang memiliki karakteristik seperti fluida *pseudo-plastic*. Dalam hal ini padatan akan mengalami deformasi jika diberi *shear stress* yang cukup. Untuk menghitung *shear stress* digunakan pendekatan dengan menggunakan persamaan berikut [12]

$$\tau = K\theta^m, \tag{21}$$

dengan $K=1$ dan $m=0.5$ untuk sifat *pseudo-plastic* serta *shear rate* θ yang dihitung menggunakan persamaan berikut

$$\theta = \frac{|v|}{l}, \tag{22}$$

dengan v merupakan kecepatan relatif partikel fluida terhadap partikel padatan dan l adalah jarak minimal *shear stress* bekerja. Fungsi erosi $e(\tau)$ dalam penelitian ini digunakan seperti yang terdapat pada [3] yang merupakan hasil eksperimen yang dinyatakan ke dalam persamaan berikut

$$e(\tau) = \begin{cases} b\tau + 0.1 & \tau > \tau_c \\ 0 & \tau \leq \tau_c \end{cases}, \tag{23}$$

dengan b merupakan parameter erosi dan τ_c adalah *critical shear stress* yang menyatakan *shear stress* minimum yang menyebabkan terjadinya erosi. Nilai b yang digunakan adalah 93 [3].

IMPLEMENTASI DAN HASIL

Boundary Conditions

Dalam metode SPH, *boundary conditions* merupakan salah satu permasalahan yang sering terabaikan. Pada awal penggunaan metode SPH tidak memerlukan *boundary conditions* atau hanya butuh kondisi sederhana seperti *non-penetrating surface* [13]. Permasalahan utama yang sering ditemukan yaitu kekurangan pada saat penjumlahan partikel yang berada di sekitar *boundary* karena orde akurasi yang berkurang disebabkan oleh *support domain* yang berpotongan dengan domain komputasi. Hal ini mengakibatkan densitas yang mengalami defisiensi di sekitar *boundary*. Pada beberapa kondisi, digunakan partikel sebagai *boundary* dan diberikan syarat untuk memberikan gaya tolak ketika partikel fluida yang bergerak mendekati *boundary*.

Digunakan persamaan (24) seperti yang terdapat pada [7,10] untuk interaksi antara partikel fluida dengan partikel padatan agar terhindar dari terjadinya penetrasi partikel fluida ke dalam struktur padatan. Gaya interaksi yang digunakan pada penelitian ini dinyatakan dalam bentuk sebagai berikut

$$f_{ij} = \frac{m_j}{m_i + m_j} \Gamma(q) \frac{r_i - r_j}{|r_i - r_j|}, \tag{24}$$

dengan

$$\Gamma(q) = \Omega \begin{cases} \frac{2}{3} & 0 < q < \frac{2}{3} \\ \left(2q - \frac{3}{2}q^2\right) & \frac{2}{3} < q < 1 \\ \frac{1}{2}(2-q)^2 & 1 < q < 2 \\ 0 & q > 2 \end{cases}, \tag{25}$$

untuk $q = \frac{|r_i - r_j|}{h}$ dan $\Omega = 0.0001 \frac{c_s^2}{|r_i - r_j|}$ yang merupakan estimasi gaya maksimum untuk membuat partikel berhenti bergerak.

Integrasi Numerik

Untuk menyelesaikan persamaan (15), dilakukan integrasi numerik terhadap persamaan (16), (18), (20) dan (24) menggunakan persamaan berikut

$$\frac{dv}{dt} = a, \tag{26}$$

$$\frac{dr}{dt} = v. \tag{27}$$

Persamaan (26) dan (27) digunakan untuk mengupdate kecepatan dan posisi partikel tiap saat. Secara numerik, persamaan (26) dan (27) dapat diselesaikan dengan menggunakan skema berikut

$$v(t + \Delta t) = v(t) + a(t)\Delta t, \tag{28}$$

dan

$$r(t + \Delta t) = r(t) + v(t)\Delta t. \tag{29}$$

Dengan memperkecil *time step* Δt maka akan menambah jumlah proses perhitungan sehingga dibutuhkan pemilihan *time step* yang proporsional. Pada penelitian ini, nilai Δt ditentukan berdasarkan *Courant-Friedrichs-Lewy (CFL) condition* [14] untuk memperoleh konvergensi dan kestabilan pada simulasi yang dilakukan. *CFL condition* dapat dinyatakan ke dalam persamaan berikut

$$\Delta t \leq \frac{h}{c_s}. \tag{30}$$

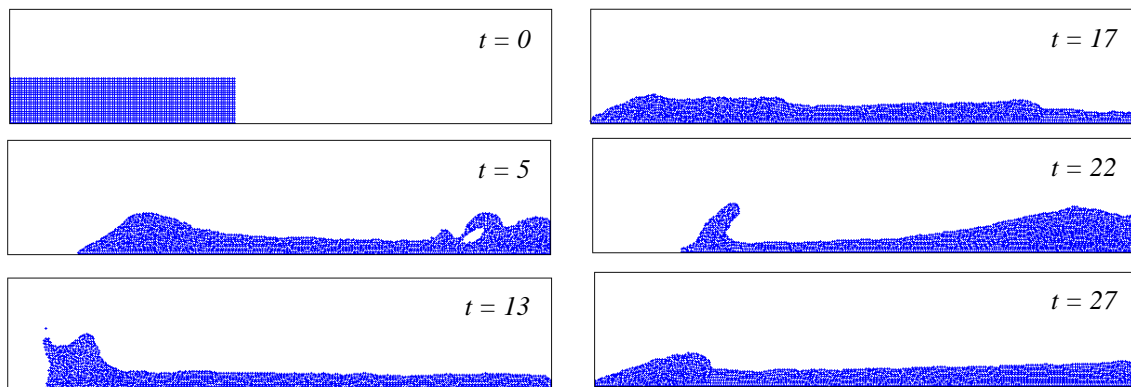
Pada saat propagasi yang terjadi dengan kecepatan maksimum sebesar kecepatan suara c_s , maka pada proses integrasi dengan *time step* yang begitu besar akan terjadi *overlapping* yang mengakibatkan ketidakstabilan selama simulasi.

Hasil

Untuk pengujian awal dari kode program yang dibuat, dilakukan simulasi *dam break* pada permasalahan *free surface flow* dengan adanya ombak. Dengan jumlah partikel $N = 2000$ dan lebar medium $L = 24$, dilakukan simulasi sampai $t = 30$. Nilai parameter yang digunakan pada simulasi *dam break* yaitu $h = 0.1$, $\Delta t = 0.005$, $m = 0.1$, $\rho_0 = 1000$ dan $g = 9.81$. Pembuat ombak pada simulasi ini menggunakan pendekatan *boundary* yang bergerak secara periodik dalam arah x yang dinyatakan dalam persamaan berikut

$$x(t) = A \sin(\omega t), \tag{31}$$

dengan $A = 3$ dan $f = 0.45$ Hz untuk $\omega = 2\pi f$. Nilai A dan f yang dipilih berdasarkan kestabilan yang dihasilkan selama simulasi. Pada beberapa nilai yang diujikan, dihasilkan partikel-partikel yang berhamburan ketika berada di dekat *boundary* yang sedang bergerak.

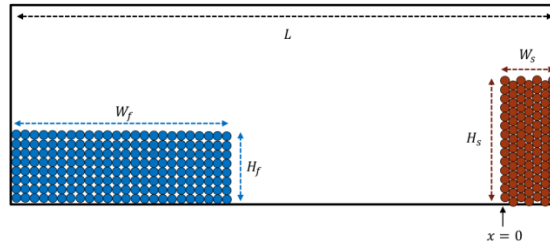


Gambar 3. Hasil simulasi *dam break* dengan adanya ombak.

Pada gambar 3, dilakukan pencuplikan pada saat t tertentu kemunculan ombak. Terlihat bahwa ombak yang dihasilkan memiliki berbagai bentuk, hal ini disebabkan oleh jumlah partikel yang berada disekitar *boundary*

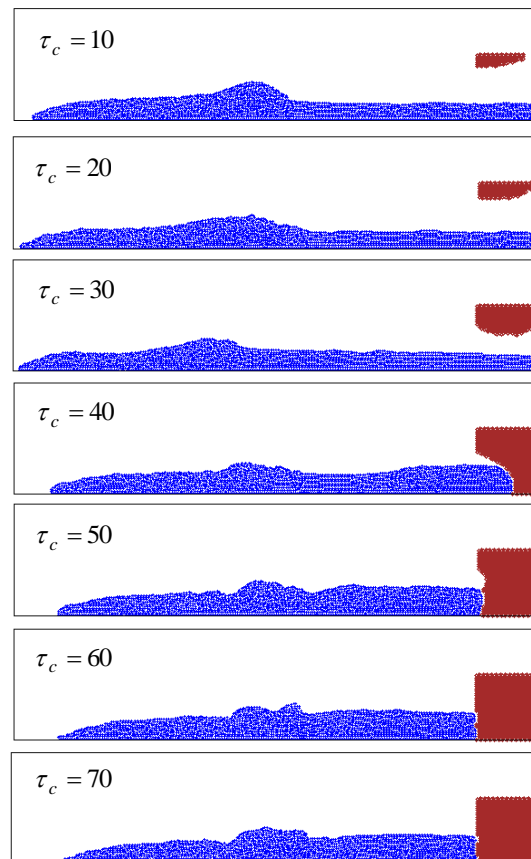
yang bergerak. Hasil ini kemudian digunakan untuk kasus abrasi yang menjadi permasalahan yang ditinjau pada penelitian ini.

Simulasi pada kasus abrasi dilakukan dengan menggunakan model seperti yang terdapat pada gambar 4. Dengan lebar fluida $W_f = 10$, ketinggian fluida $H_f = 2$, lebar padatan $W_s = 3$ dan ketinggian padatan $H_s = 3$. Parameter yang digunakan yaitu jumlah partikel fluida $N_f = 2000$, jumlah partikel padatan $N_s = 900$, massa partikel fluida $m_f = 0.1$, massa partikel padatan $m_s = 0.3$, densitas fluida $\rho_0^f = 1000$ dan densitas padatan $\rho_0^s = 1500$.



Gambar 4. Model simulasi pada kasus abrasi

Untuk menentukan pada saat kapan partikel akan mengalami erosi digunakan persamaan (23). Jika $\tau > \tau_c$, maka partikel akan tererosi dan kemudian dihilangkan dalam perhitungan. Asumsi lain yang diberikan yaitu partikel padatan tidak mengalami perubahan posisi selama simulasi.

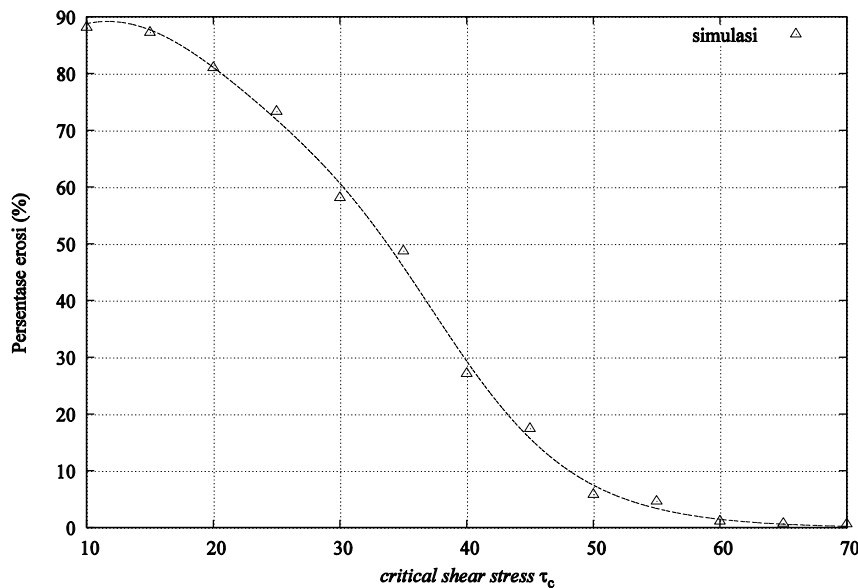


Gambar 5. Hasil simulasi abrasi dengan variasi nilai τ_c .

Pada gambar 5, terlihat terjadinya erosi pada partikel padatan dengan τ_c yang bervariasi. Grafik pada gambar 6 memperlihatkan hubungan antara τ_c dengan persentase partikel yang tererosi P_e yang dihitung menggunakan persamaan berikut

$$P_e = \frac{N_e}{N_s} \times 100\% , \tag{32}$$

dengan N_e adalah jumlah partikel padatan yang tererosi dan N_s adalah jumlah awal partikel padatan. Jika melihat gambar 5 untuk $\tau_c = 10$ dan $\tau_c = 20$, partikel padatan yang tidak mengalami erosi terlihat seperti melayang, hal ini disebabkan oleh asumsi awal bahwa partikel padatan tidak mengalami perubahan posisi selama simulasi dan akan dihilangkan dari perhitungan berikutnya jika mengalami erosi. Untuk hasil yang lebih sesuai dengan kondisi fisis, hal ini perlu dipertimbangkan pada penelitian selanjutnya.



Gambar 6. Hubungan persentase partikel yang tererosi terhadap *critical shear stress* τ_c .

Dari gambar 6 terlihat bahwa pada nilai τ_c yang semakin besar, persentase partikel yang tererosi akan semakin sedikit atau mendekati nol. Dalam hal ini, nilai τ_c dapat dinyatakan sebagai karakteristik yang dimiliki oleh padatan itu sendiri apakah semakin mudah tererosi ataupun sulit tererosi. Pada penelitian ini, nilai τ_c yang diujikan tidak menentukan jenis dari padatan tersebut. Untuk hasil yang lebih sesuai dengan kondisi fisis dari proses abrasi dibutuhkan nilai τ_c yang dihitung berdasarkan hasil eksperimen.

KESIMPULAN

Metoda SPH dapat digunakan dalam memodelkan dan mensimulasikan kasus dinamika fluida yang dalam penelitian ini yaitu pada proses abrasi oleh ombak laut tanpa melibatkan proses sedimentasi dan transportasi. Hasil-hasil yang diperoleh merupakan hasil eksperimen secara numerik dengan memvariasikan parameter-parameter yang ingin diketahui pengaruhnya terhadap proses abrasi dalam hal ini yaitu *critical shear stress* τ_c . Hasil simulasi menunjukkan bahwa nilai τ_c mempengaruhi persentase partikel yang tererosi.

REFERENSI

1. F.K. Musgrave., C.E. Kolb dan R.S. Mace. *The synthesis and rendering of eroded fractal terrains*. Proceedings of the 1989 ACM SIGGRAPH conference, **23**, 41-50, New York, USA. ACM. (1989)
2. P. Krištof., B. Beneš., J. Křivánek dan O. Št'ava. *Hydraulic erosion using Smoothed Particle Hydrodynamics*. Computer Graphics Forum, **22**, 219-228. (2009)
3. C. Zhongxian. *Levee erosion simulation using Smoothed Particle Hydrodynamics*. Master's Thesis. Rensselaer Polytechnic Institute, New York. (2010)
4. R.A. Gingold dan J.J. Monaghan. *Smoothed Particle Hydrodynamics: theory and application to non-spherical stars*. Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. **181**, 375-389. (1997).
5. L.B. Lucy. *A numerical approach to the testing of the fission hypothesis*. The Astronomical Journal. **82**, 1013-1024. (1977)
6. J.J. Monaghan. *Smoothed Particle Hydrodynamics*. Annual Review of Astronomy and Astrophysics, **30**, 543-574. (1992)

7. J.J. Monaghan. *Smoothed Particle Hydrodynamics*. Report on Progress in Physics, **68**, 1739-1759. (2005)
8. S. Clavet., P. Beaudoin dan P. Poulin. *Particle-based viscoelastic fluid simulation*. Proceedings of the 2005 ACM SIGGRAPH/Eurographics symposium on Computer animation, New York, USA., ACM, 219-228. (2005)
9. M. Desbrun dan M.P. Gascuel. *Smoothed particles: A new paradigm for animating highly deformable bodies*. Proceedings of the Eurographics workshop on Computer animation and simulation '96. New York, USA. Springer-Verlag, 61-76. (1996)
10. M. Becker dan M. Teschner. *Weakly compressible SPH for free surface flows*. Proceedings of the 2007 ACM SIGGRAPH/Eurographics symposium on Computer animation, San Diego, USA., 63-72. (2007)
11. F. Fossum. *Surface tension in smoothed particle hydrodynamics on the GPU*. Master's Thesis, Norwegian University of Science and Technology. (2010)
12. C. Wojtan., M. Carlson., P.J. Mucha dan G. Turk. *Animating Corrosion and Erosion*, Proceedings of the Third Eurographics conference on Natural Phenomena. Aire-la-Ville, Switzerland. Eurographics, 15-22. (2007)
13. P.W. Randles dan L.D. Libersky. *Smoothed Particle Hydrodynamics: Some recent improvement and applications*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. **139**. 375-408. (1996)
14. G.R. Liu dan M.B. Liu. *Smoothed particle hydrodynamics: A meshfree particle method*. World Scientific Publishing, Singapore. (2003)