

Visualisasi Aliran Fluida Menggunakan Variabel Kompleks pada Model Dinamika Air Tanah

Santi Hatmanti^{1,a)}, Acep Purqon^{2,b)}

¹Sains Komputasi,
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Institut Teknologi Bandung,
Jl. Ganesha no. 10 Bandung, Indonesia, 40132

²Laboratorium Fisika Bumi,
Kelompok Keilmuan Fisika Bumi dan Sistem Kompleks,
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Institut Teknologi Bandung,
Jl. Ganesha no. 10 Bandung, Indonesia, 40132

^{a)}santi_hatmanti@s.itb.ac.id

^{b)}acep.purqon@fi.itb.ac.id

Abstrak

Dinamika fluida mempelajari perilaku zat cair dan gas dalam keadaan diam dan bergerak dan interaksinya dengan benda lain. Salah satu aspek penting dalam dinamika fluida adalah visualisasi aliran. Visualisasi aliran dapat dilakukan dengan menggunakan metode variabel kompleks. Metode ini menggunakan hasil-hasil teori bilangan kompleks untuk memperoleh solusi dari aliran inkompresibel potensial dua dimensi. Keuntungan metode ini adalah memudahkan dalam mencari solusi aliran inkompresibel dua dimensi karena tidak perlu menyelesaikan persamaan diferensial. Tujuan penelitian ini adalah melakukan visualisasi dua dimensi potensial kompleks aliran fluida air. Parameter yang akan divariasikan adalah fungsi potensial dan fungsi aliran dari beberapa bentuk aliran sederhana. Dari penelitian ini diharapkan dapat memberikan informasi tentang aplikasi metode variabel kompleks dalam mempelajari dinamika fluida, khususnya visualisasi aliran fluida.

Kata-kata kunci: visualisasi aliran fluida, potensial kompleks, fungsi aliran, bilangan kompleks

PENDAHULUAN

Dinamika fluida merupakan salah satu cabang ilmu yang mempelajari perilaku zat cair dan gas dalam keadaan diam dan bergerak dan interaksinya dengan benda lain. Salah satu aspek penting dalam dinamika fluida adalah visualisasi aliran. Dalam makalah ini akan dilakukan visualisasi aliran fluida pada model aliran air tanah. Terdapat beberapa metode yang telah digunakan dalam melakukan pemodelan visualisasi aliran fluida diantaranya: Lattice boltzman [1], metode ini didasarkan pada teori kinetik gas dimana suatu fluida diasumsikan sebagai suatu gas ideal yang bergerak acak ke segala arah dan memiliki keterkaitan satu sama lain. *Smoothed particle hydrodynamics*, pada metode ini aliran suatu fluida didiskritisasi menjadi partikel-partikel kecil yang berdiameter sama dan memiliki propertis fisika seperti massa, massa jenis, posisi dan kecepatan. Metode elemen hingga [2], metode ini menggunakan persamaan Navier-Stokes dalam menyelesaikan permasalahan aliran fluida, dimana persamaan N-S didiskritisasi dalam fungsi waktu dan posisi. Konvolusi integral garis, sangat baik digunakan untuk memvisualisasikan medan vektor dari suatu aliran [3].

Dalam makalah ini, visualisasi aliran akan dilakukan dengan menggunakan metode variabel kompleks. Metode variabel kompleks sangat baik digunakan dalam mempelajari aliran fluida Newtonian inkompresibel [4] dan simulasi aliran dalam media berpori [5]. Metode ini menggunakan hasil-hasil dari teori bilangan

kompleks untuk mendapatkan solusi dari alirannya. Keuntungan menggunakan variabel kompleks dalam visualisasi aliran adalah memudahkan untuk mencari solusi aliran inkompresibel 2 dimensi karena tidak perlu menyelesaikan persamaan diferensial parsial sebagaimana dalam metode lainnya. Oleh Karena itu dalam makalah ini akan dilakukan visualisasi aliran potensial fluida menggunakan bilangan kompleks serta mengetahui bentuk atau pola garis aliran dan ekipotensial dari beberapa bentuk aliran.

VISUALISASI ALIRAN FLUIDA DENGAN VARIABEL KOMPLEKS

Klasifikasi Aliran Fluida

Berdasarkan alirannya, fluida dapat dibagi dalam beberapa golongan:

1. Aliran 1D, 2D dan 3D
Aliran 1D adalah aliran yang hanya terjadi pada satu dimensi saja, aliran 2D hanya terjadi pada bidang 2 dimensi saja, sedangkan aliran 3D terjadi pada ruang 3 dimensi.
2. Aliran termampatkan (*compressible flow*) dan aliran taktermampatkan (*incompressible flow*)
Aliran termampatkan adalah kondisi aliran dimana rapat massa fluidanya berubah sedangkan aliran taktermampatkan adalah kondisi aliran dimana rapat massa fluidanya tidak berubah atau konstan.
3. Aliran tunak (*steady flow*) dan aliran taktunak (*unsteady flow*)
Aliran tunak adalah kondisi aliran dimana komponen aliran tidak berubah terhadap waktu sedangkan aliran taktunak adalah kondisi aliran dimana komponen aliran berubah terhadap waktu.
4. Aliran seragam (*uniform flow*) dan takseragam (*nonuniform flow*)
Aliran seragam adalah kondisi dimana komponen aliran tidak berubah terhadap jarak sedangkan aliran takseragam adalah kondisi aliran dimana komponen aliran berubah terhadap jarak.
5. Aliran laminar (*laminar flow*) dan aliran turbulen (*turbulent flow*)
Aliran laminar adalah aliran dengan fluida yang bergerak dalam lapisan-lapisan dengan satu lapisan dengan satu lapisan mengalir secara lancar. Sedangkan aliran turbulen adalah aliran dimana pergerakan partikel-partikel fluida tidak menentu karena mengalami pencampuran serta putaran partikel antar lapisan yang mengakibatkan saling tukar momentum dari satu bagian fluida ke bagian fluida yang lain dalam skala yang besar.
6. Aliran *viscous* dan aliran *inviscid*
Aliran *viscous* adalah aliran yang dipengaruhi oleh viskositas. Adanya viskositas menyebabkan adanya tegangan geser dan kehilangan energi sedangkan aliran *inviscid* adalah aliran yang tidak dipengaruhi oleh viskositas.
7. Aliran rotasi (*rotational flow*) dan takrotasi (*irrotational flow*)
Aliran rotasi adalah aliran dimana nilai rotasinya atau setiap komponen vektor rotasinya tidak sama dengan nol sedangkan aliran takrotasi adalah aliran dimana nilai rotasinya atau setiap komponen vektor rotasinya sama dengan nol atau $\text{curl } V = 0$.

Untuk aliran takrotasi 2D, maka:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} - \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \tag{1}$$

Persamaan Kontinuitas

Persamaan kontinuitas diperoleh dari hukum kekekalan massa fluida. Persamaan kontinuitas menyatakan persyaratan bahwa suatu fluida harus kontinyu serta massa fluida bersifat kekal.

$$\frac{\partial \rho}{\partial z} + \frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} = 0 \tag{2}$$

Persamaan (2) merupakan persamaan kontinuitas fluida. Untuk aliran inkompresibel dimana rapat massa konstan, persamaan kontinuitas menjadi:

$$\frac{\partial(v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(v_z)}{\partial z} = 0 \tag{3}$$

Fungsi Aliran

Fungsi aliran merupakan fungsi matematik yang tidak dapat diobservasi secara langsung di dunia nyata tetapi sangat baik untuk perhitungan dan visualisasi aliran dua dimensi. Bersama dengan potensial, fungsi aliran memungkinkan melakukan visualisasi bentuk aliran yang sulit dihasilkan dengan metode lain [6]. Dalam aliran dua dimensi, persamaan-persamaan untuk garis arus bisa dijelaskan dengan fungsi aliran. Harga-harga fungsi aliran ψ yang berbeda menyatakan garis arus yang berbeda pula. Garis arus atau *streamline* merupakan garis yang setiap saat menjadi tempat singgungan vektor-vektor kecepatan. Karakteristik pola-pola aliran garis arus adalah: tidak ada aliran yang memotong suatu garis arus, Jarak garis arus berbanding terbalik dengan kecepatan sehingga semakin sempit jarak antara garis arus menunjukkan kecepatan yang besar dan garis arus tidak saling berpotongan. Persamaan garis arus adalah sebagai berikut:

$$v_x dy - v_y dx = 0 \tag{4}$$

Fungsi aliran dalam 2 dimensi komponene kecepataannya didefinisikan dengan persamaan sebagai berikut:

$$v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}, v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \tag{5}$$

Dengan v_x dan v_y adalah komponen kecepatan dalam arah y dan x . Jika v_x dan v_y disubstitusikan ke persamaan garis arus maka :

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} dy + \frac{\partial \psi}{\partial x} dx = 0 \tag{6}$$

ψ konstan disepanjang garis arus. Ketika $\psi(x, y)$ diketahui, berbagai garis ψ konstan dapat dipetakan untuk mendapatkan berbagai garis arus aliran. Untuk aliran irrotasional fungsi aliran memenuhi persamaan Laplace:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = 0 \tag{7}$$

Fungsi Potensial Kecepatan

Tabel 1. Hubungan fungsi aliran dan fungsi potensial

Fungsi Aliran	Fungsi Potensial
<ul style="list-style-type: none"> • Persamaan kontinuitas: $\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0$ • Komponen kecepatan: $v_x = \frac{\partial v_x}{\partial y}, v_y = -\frac{\partial v_y}{\partial x}$ $V = \frac{\partial \psi}{\partial n}$ ∂n adalah bagian dari suatu garis ekuipotensial yang dinyatakan oleh $\partial \phi = 0$ ∂n tegak lurus terhadap garis arus • Persamaan irrotasional: $\nabla^2 \psi = 0$ 	<ul style="list-style-type: none"> • Persamaan irrotasional: $\frac{\partial v_x}{\partial x} - \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0$ • Komponen kecepatan: $v_x = \frac{\partial v_x}{\partial y}, v_y = -\frac{\partial v_y}{\partial x}$ $V = \frac{\partial \phi}{\partial s}$ ∂s adalah bagian dari suatu <i>streamline</i> yang dinyatakan oleh $\partial \psi = 0$ ∂s tegak lurus terhadap garis ekuipotensial • Persamaan kontinuitas $\nabla^2 \phi = 0$

Notasi potensial adalah ϕ yang mana medan aliran diturunkan dari gradient ϕ . ϕ merupakan kecepatan potensial jika $\vec{v} = \pm \nabla \phi$. Karena vektor kecepatan \vec{v} merupakan gradien dari kecepatan potensial sehingga aliran potensial disebut juga aliran irrotasional. Untuk fluida inkompresibel, persamaan kontinuitas menjadi:

$$\nabla^2 \phi = 0 \tag{8}$$

sehingga aliran potensial untuk fluida inkompresibel, kecepatan potensial ϕ memenuhi persamaan Laplace sehingga aliran potensial untuk kasus 2 dimensi menjadi:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y_2} = 0 \tag{9}$$

Setelah diperoleh solusi persamaannya maka kecepatan v_x dan v_y dapat ditentukan:

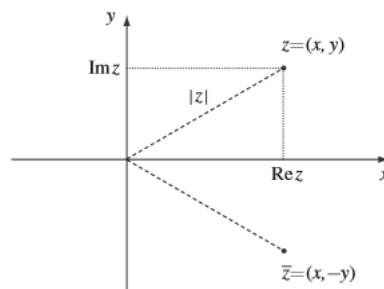
$$v_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad v_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y} \tag{10}$$

Bilangan Kompleks

Bilangan kompleks adalah bilangan imajiner yang memiliki bentuk sebagai berikut:

$$z = x + iy, \tag{11}$$

dimana x dan y adalah bilangan riil sedangkan i adalah bilangan imajiner dengan sifat $i^2 = -1$.



Gambar 1. Bidang kompleks [6]

Operasi bilangan kompleks sama seperti operasi aritmatika biasa yaitu penjumlahan, pengurangan, perkalian, dan pembagian seperti bilangan riil. Namun bilangan kompleks juga mempunyai sifat-sifat tambahan yang unik misalnya pada setiap bilangan aljabar polinomial, bilangan riil memiliki solusi bilangan kompleks, tidak seperti bilangan riil yang hanya memiliki sebagian.

Bilangan kompleks $z = x + iy$, merupakan spesifikasi bilangan riil (x, y) sehingga bilangan kompleks mempunyai hubungan satu-satu dengan titik-titik pada satu bidang. Bilangan kompleks dapat divisualkan sebagai titik atau vektor posisi pada sistem koordinat dua dimensi yang disebut sebagai bidang kompleks. Koordinat kartesian bilangan kompleks adalah sumbu riil x dan sumbu imajiner y , sedangkan koordinat sirkulernya adalah $r = |z|$ yang disebut sebagai modulus dan $\varphi = \arg(z)$ yang disebut sebagai argumen kompleks dari z . Setelah dikombinasikan dengan rumus Euler, diperoleh:

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta) = re^{i\theta} \tag{12}$$

Argumen kompleks merupakan unik modulo 2π sehingga jika terdapat dua nilai argumen kompleks yang berbeda sebanyak kelipatan bilangan bulat dari 2π maka kedua argumen tersebut sama atau ekuivalen. Dengan menggunakan identitas trigonometri dasar, diperoleh:

$$\begin{cases} \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \\ \cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \end{cases} \tag{13}$$

Penjumlahan dua bilangan kompleks sama seperti penjumlahan vektor dari dua vektor, dan perkalian dengan bilangan kompleks dapat divisualisasikan sebagai rotasi dan pemanjangan secara bersamaan. Perkalian dengan i adalah rotasi 90 derajat berlawanan arah jarum jam ($\pi/2$ radian). Secara geometris i^2 merupakan dua kali rotasi 90 derajat yang sama dengan rotasi 180 derajat (π radian).

Persamaan Cauchy Riemann

Persamaan Cauchy–Riemann merupakan persamaan yang sangat penting pada analisis kompleks karena persamaan ini digunakan untuk menguji keanalitikan suatu fungsi kompleks $w = F(z) = v_x(x, y) + i v_y(x, y)$. Untuk mencari tahu sifat analitik dari fungsi kompleks dapat digunakan limit dan kekontinuitasan dari suatu fungsi pada suatu bidang kompleks. Jika $F(z)$ mempunyai limit untuk

$z = z_0$, maka $F(z)$ dikatakan analitik di z_0 . Untuk v_x dan v_y adalah fungsi riil dari x dan y pada R , syarat yang dibutuhkan adalah bahwa v_x dan v_y memenuhi persamaan Cauchy-Riemann yaitu:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = \frac{\partial v_y}{\partial y}, \frac{\partial v_x}{\partial y} = -\frac{\partial v_y}{\partial x} \tag{14}$$

POTENSIAL KOMPLEKS UNTUK ALIRAN POTENSIAL 2 DIMENSI

Solusi aliran potensial dua dimensi dapat diperoleh dengan potensial kompleks menggunakan variabel kompleks dengan kondisi sebagai berikut:

1. Aliran fluidanya dua dimensi, tunak dan irrotasional.
2. Fluidanya inkompresibel sehingga mengikuti persamaan kontinuitas untuk fluida inkompresibel.
3. Diasumsikan fluidanya tidak memiliki viskositas mengikuti sifat fluida ideal.
4. Fungsi kecepatan potensial φ dan fungsi aliran ψ dihubungkan dengan persamaan Cauchy-Riemann sehingga menjadi sebagai berikut:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \tag{15}$$

Persamaan ini menjelaskan kondisi yang harus dipenuhi oleh sebuah fungsi $F(z)$ apabila fungsi tersebut adalah fungsi analitik dengan:

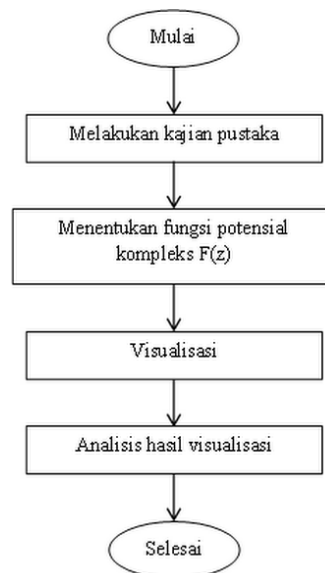
$$F(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y) \tag{16}$$

$$z = x + iy$$

Visualisasi Potensial Kompleks pada Model Air Tanah

Secara umum prosedur kerja untuk visualisasi potensial kompleks pada model air tanah adalah sebagai berikut:

1. Melakukan kajian pustaka aplikasi variabel kompleks untuk aliran potensial.
2. Menentukan fungsi potensial kompleks aliran fluida air $F(z)$ yang akan digunakan untuk simulasi.
3. Membuat program Matlab untuk mensimulasikan sebaran potensial dari fungsi potensial kompleks yang telah ditentukan.
4. Mensimulasikan bentuk potensial dari fungsi aliran potensial yang telah ditentukan.
5. Melakukan analisis hasil simulasi.



Gambar 3. Alur kerja

HASIL

Dalam makalah ini dilakukan simulasi aliran potensial fluida dua dimensi untuk kasus sistem sumur dengan beberapa variasi laju pemompaan. Jumlah sumur yg digunakan adalah 3 sumur. Simulasi dilakukan dengan menggunakan fungsi potensial kompleks untuk aliran dasar dan sumur dengan persamaan sebagai berikut:

Base flow : $F_1(z) = -\vec{Q}_0 z$

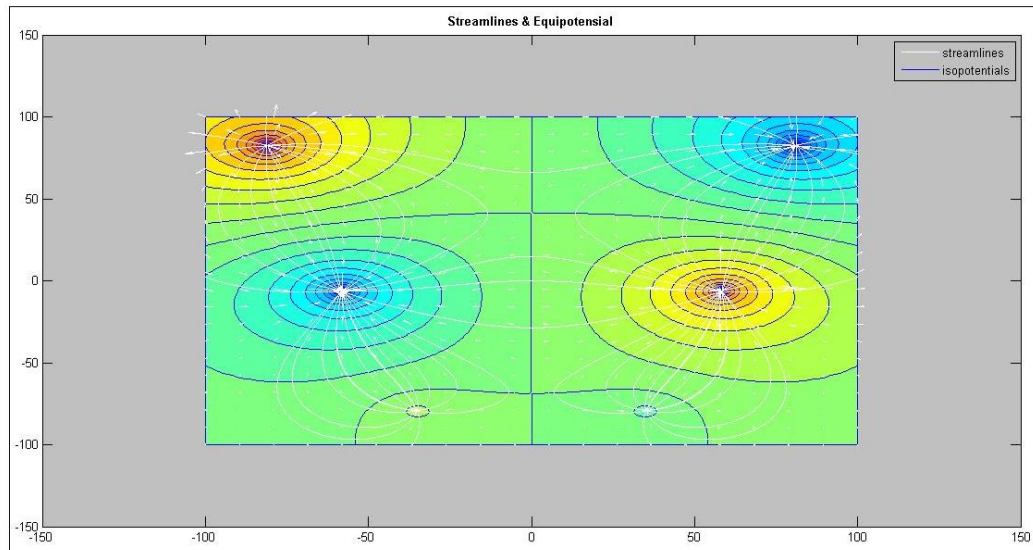
Well : $F_2(z) = \frac{Q}{2\pi} \ln(z - z_i)$

dengan $z = x + iy$. $F_2(z)$ merupakan fungsi untuk jenis aliran sumber (*source flow*) dengan asumsi bahwa aliran sumber adalah sumur pemompaan. Q adalah laju pemompaan pada sumur sedangkan z_i adalah posisi sumur dalam bilangan kompleks. Dalam visualisasi juga menggunakan metode mirror yang posisinya ditentukan dengan fungsi conjugate complex dari bilangan kompleks.

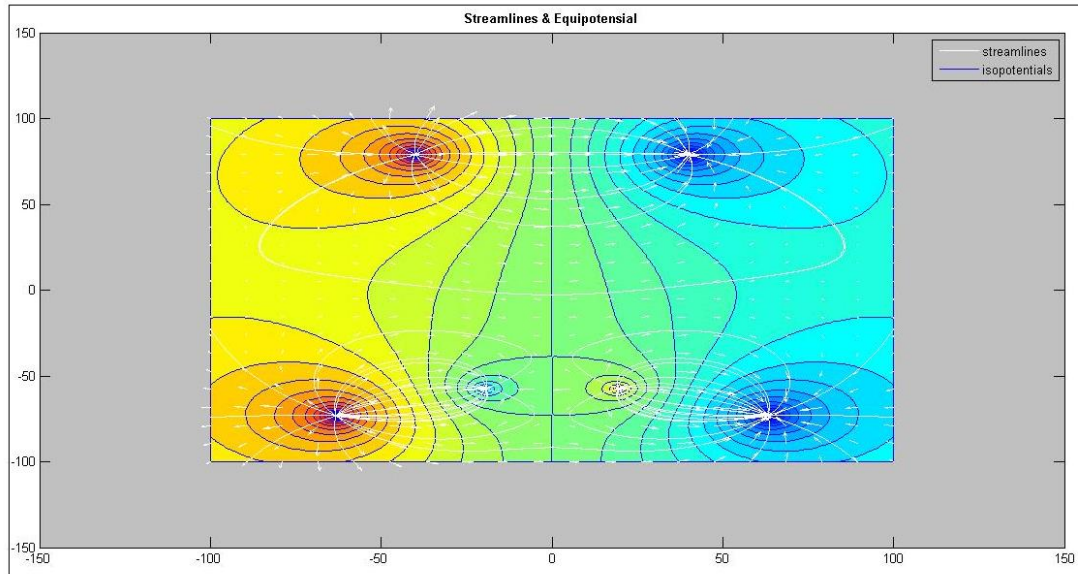
Hasil visualisasi ditunjukkan pada gambar 3 sampai gambar 5. Garis-garis putih adalah garis-garis arus (*streamlines*) yang merepresentasikan lintasan partikel fluida. Sedangkan garis-garis biru adalah garis-garis ekipotensial (*equipotentials*) yang merepresantasikan perbedaan tekanan fluida. Panah hitam merupakan medan aliran. Garis-garis arus dan garis-garis ekipotensial selalu saling tegak lurus. Perbedaan warna menunjukkan sebaran potensial dengan warna merah untuk potensial tertinggi dan warna biru potensial terendah.

Pada gambar 3 menunjukkan bahwa semakin rapat jarak antar garis-garis arus maka kecepatan aliran semakin besar, demikian pula sebaliknya. Medan aliran bergerak dari daerah dengan potensial tinggi ke daerah dengan potensial rendah. Visualisasi dilakukan dengan bervariasi laju pemompaan yakni $2 \text{ m}^3/\text{s}$ dan $5 \text{ m}^3/\text{s}$, $5 \text{ m}^3/\text{s}$ dan $8 \text{ m}^3/\text{s}$, $8 \text{ m}^3/\text{s}$ dan $11 \text{ m}^3/\text{s}$. Hasilnya menunjukkan bahwa semakin besar nilai laju pemompaan maka terjadi perbedaan yang signifikan nilai potensial dari masing-masing sumur. Hal ini nampak dari garis-garis ekipotensial yang memetakan masing-masing sumur. Masing-masing garis ekipotensial menunjukkan perbedaan nilai potensial.

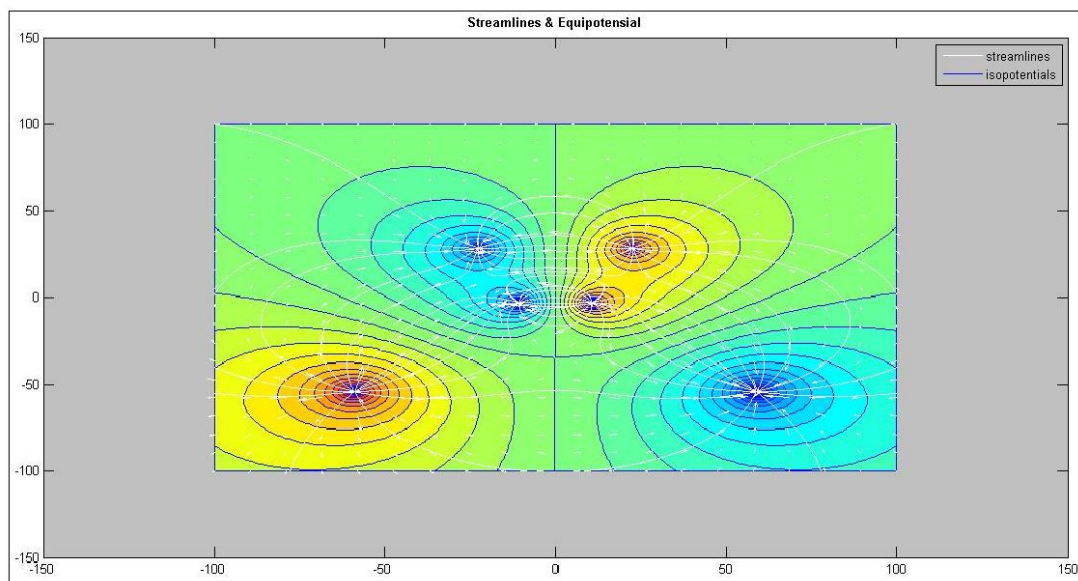
Berikut gambar hasil visualisasi dengan 3 sumur pemompaan dan beberapa variasi laju pemompaan:



Gambar 3. Pola garis arus dan garis ekipotensial dengan laju pemompaan $2 \text{ m}^3/\text{s}$ dan $5 \text{ m}^3/\text{s}$



Gambar 4. Pola garis arus dan garis ekipotensial dengan laju pemompaan 5 m/s^3 dan 8 m/s^3



Gambar 5. Pola garis arus dan garis ekipotensial dengan laju pemompaan 8 m/s^3 dan 11 m/s^3

KESIMPULAN

Metode variabel kompleks dapat menjadi salah satu metode alternatif dan sederhana untuk melakukan visualisasi aliran fluida pada model aliran air tanah tanpa harus menyelesaikan persamaan diferensial parsial. Pola *streamline* dan garis ekipotensial dapat divisualkan dengan baik menggunakan metode variable kompleks. Selanjutnya dapat dilakukan variasi bentuk potensial yang lain untuk melihat pola *streamline* dan garis ekipotensial.

REFERENSI

1. Chen. Shiyi, Doolen. Gary D, *Lattice Boltzmann for Fluid Flow*, Annu. Rev. Fluid Mech, (1998)
2. Tezduyar. Tayfun E, *Finite Element Methods for Fluid Dynamics with Moving Boundaries and Interfaces*, Encyclopedia of Computational Mechanics, Volume 3: Fluids, (2004)
3. Forssell, Cohen. Scott D, *Using Line Integral Convolution for Flow Visualization: Curvilinear Grids, Variable-Speed Animation, and Unsteady Flows*, IEEE Transaction on Visualization and Computer Graphics Vol. 1 no. 2, (1995)
4. Coleman, C.J, *On the use complex variable in the analysis of flows of an elastic fluid*. Journal of Non-Newtonian FLuid Mecanics, **15**, 227-238, (1983)
5. Hui-bin, Song. Mei-li, Zhan. Jin Chang, Sheng. Yu-long, Luo, *Stochastic simulation of fluid flow in porous media by the complex variable expression method*, Journal of Hydrodynamics. **25(2)**, 215-225 (2013)
6. Holzbecher. Ekkehard, *Enviromental Modeling Using MATLAB Second Edition*. Springer.
7. Zakharov, Vladimir E. Dyachenko, Alexander I, *New method for numerical simulation of an nonstationary potential flow of incompresible fluid with a free surface*, European Journal of Mechanics B/Fluids, **21**, 283-291, (2002)
8. McDonough, J. M, *Lectures in Elementary Fluid Dynamics: Physics, Mathematics and Aplications*, Departements of Machanical Engineering and Mathematics. University of Kentucky, Lexington, (2009)
9. Sato. Kozo, *Complex Analysis for Practical Engineering*, University of Tokyo. Japan. Springer, (2015)