

Pemodelan Gaya Casimir dalam Sistem Satu-Dimensi Granular Gravitasi-Diri dengan Operator Tukar

Sparisoma Viridi^{1,a),*}, Siti Nurul Khotimah^{1,b)}, Putri Mustika Widartiningsih^{1,c)}

¹Laboratorium Fisika Granular dan Fluida,
Kelompok Keilmuan Fisika Nuklir dan Biofisika,
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Institut Teknologi Bandung,
Jl. Ganesha no. 10 Bandung, Indonesia, 40132

^{a)}dudung@fi.itb.ac.id (corresponding author)

^{b)}nurul@fi.itb.ac.id

^{c)}putrimw.itb@gmail.com

Abstrak

Sistem granular satu dimensi yang hanya memiliki gravitasi diri ditelaah dalam tulisan ini. Setiap dua butiran yang berdekatan dapat saling ditukar posisinya melalui suatu operator tukar yang bekerja secara acak dengan syarat energi potensial sistem setelah kedua butiran ditukar harus lebih rendah dari sebelumnya. Butiran dapat berbeda massa, ukuran, ataupun kerapatan. Dua buah intruder diletakkan agak terpisah sebagai syarat awalnya. Teramati adanya kompetisi antara efek volume dan massa yang membuat kedua intruder saling mendekat atau menjauh. Nilai $D_A/D_B = 2$ dan $m_A/m_B > 1$ membuat intruder saling mendekat, sedangkan $D_A/D_B = 2$ dan $m_A/m_B < 1$ membuat kedua intruder berjarak tertentu. Hal ini mirip dengan efek kacang Brasil yang atraktif antar sesamanya, yang dialamatkan dengan adanya gaya Casimir.

Kata-kata kunci: Peluruhan Efek kacang Brasil, gravitasi diri, satu-dimensi, gaya Casimir

PENDAHULUAN

Sistem 1-d partikel yang berinteraksi dengan gaya gravitasi telah lama dipelajari dengan memecahkan persamaan Schrödinger [1], yang menunjukkan adanya relaksasi saat mencapai kesetimbangan termodinamika [2], dan dapat menimbulkan chaos walaupun hanya tersusun dari tiga partikel [3]. Gerak partikel 1-d sendiri telah pula dipelajari dalam merancang sistem pencacah [4] dan urutannya saat diinjeksikan ke sistem 2-d yang mempengaruhi distribusi deposisi partikel [5].

MODEL

Sistem partikel 1-d

Terdapat N buah partikel berbentuk lingkaran. Partikel i yang berada pada posisi x_i memiliki massa m_i dan diameter D_i dengan $i = 1, 2, \dots, N$. Saat $t = 0$ partikel pertama berada pada posisi $x_1(0)$ yang membuat posisi partikel-partikel lainnya dapat ditentukan melalui

$$x_j(0) = x_1(0) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^j D_i. \quad (1)$$

Posisi pusat massa partikel x_{pm} dapat dihitung menggunakan

$$x_{pm} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i x_i \quad (2)$$

dengan massa total sistem M adalah

$$M = \sum_{i=1}^N m_i . \tag{3}$$

Gaya gravitasi antar partikel diberikan oleh

$$\vec{F}_{ij} = -G \frac{m_i m_j}{|x_i - x_j|^3} (x_i - x_j) . \tag{4}$$

Persamaan (4) menggambarkan gaya gravitasi pada partikel i akibat adanya medan gravitasi yang ditimbulkan oleh partikel j . Posisi masing-masing partikel adalah x_i dan x_j . Energi potensial gravitasi antara m_i dan m_j dihitung dengan menggunakan

$$U_{ij} = G \frac{m_i m_j}{|x_i - x_j|} , \tag{5}$$

sehingga energi potensial total sistem akan menjadi

$$U = \frac{1}{2} \sum_{j \neq i} U_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{j \neq i} G \frac{m_i m_j}{|x_i - x_j|} . \tag{6}$$

Faktor $\frac{1}{2}$ dalam Persamaan (6) muncul untuk mengoreksi perhitungan ganda pada indeks ij dan ji ($i \neq j$).

Operator tukar

Dalam sistem 1-d tidak dimungkinkan suatu partikel bertukar tempat secara fisis sebagaimana dalam 2- atau 3-d yang mana partikel dapat bergerak menghindari partikel, lalu kemudian mengambil tempat partikel tersebut. Dengan demikian pertukaran posisi dua buah partikel dapat terjadi. Untuk sistem 1-d perlu didefinisikan suatu operator tukar, yang menukar posisi dan sifat-sifat dari dua partikel yang merupakan operan dari operator tukar tersebut. Didefinisikan Z_i sebagai suatu variabel yang menggambarkan suatu partikel bermassa m_i , berdiameter D_i , dan berada pada posisi x_i . Untuk mengambil nilai-nilai fisis dari Z_i didefinisikan fungsi-fungsi

$$f_m(Z_i) = m_i , \tag{7.a}$$

$$f_D(Z_i) = D_i , \tag{7.b}$$

$$f_x(Z_i) = x_i . \tag{7.c}$$

Operator tukar \hat{T} yang bekerja pada Z_i and Z_j

$$\hat{T}(Z_i, Z_j) , \tag{8}$$

akan menghasilkan

$$f_m(Z_i) = m_j , f_m(Z_j) = m_i , \tag{9.a}$$

$$f_D(Z_i) = D_j , f_D(Z_j) = D_i , \tag{9.b}$$

$$f_x(Z_i) = x_j + \Delta x , f_x(Z_j) = x_i + \Delta x . \tag{9.c}$$

Persamaan (9.c) dapat diperoleh melalui ilustrasi dalam Gambar 1, yang akan memberikan

$$\Delta x = \frac{1}{2}(D_j - D_i) . \tag{10}$$

Meminimalkan energi potensial

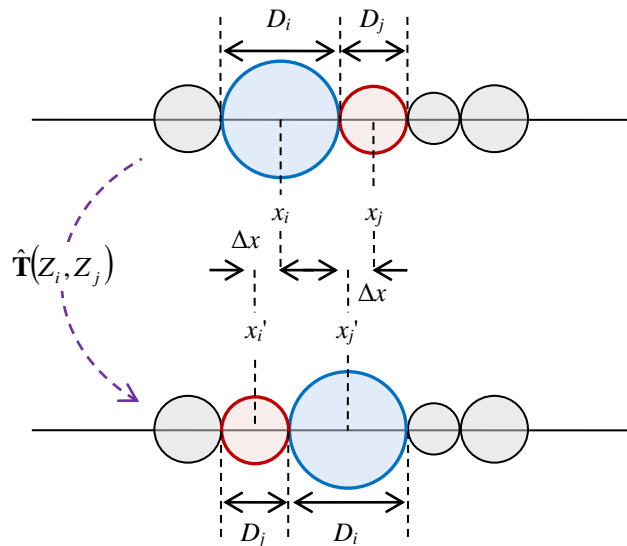
Dalam upaya untuk meminimalkan energi potensial gravitasi dalam sistem yang dibahas dalam tulisan ini operasi pertukaran dengan menggunakan Persamaan (8) hanya akan dilakukan bila

$$U(t + \Delta t) < U(t) , \tag{11}$$

di mana waktu t adalah sebelum operasi pertukaran dan waktu $t + \Delta t$ adalah setelah operasi pertukaran. Pemilihan pasangan partikel mana yang akan ditukar dilakukan secara acak dengan membangkitkan dua bilangan random i dan j dengan

$$i = 1 + \|(N - 1)U[0, 1]\| \tag{12}$$

dan



Gambar 1. Proses pertukaran sifat-sifat Z_i dan Z_j melalui operator \hat{T} .

$$j = \begin{cases} 1, & i = 1, \\ -1 + 2\|U[0,1]\|, & 1 < i < N, \\ -1, & i = N, \end{cases} \quad (13)$$

di mana $\|x\|$ akan membulatkan x ke bilangan integer terdekat dan

$$U(a,b,x) = \begin{cases} 0, & x < a, \\ \frac{1}{b-a}, & a \leq x \leq b, \\ 0, & x > b. \end{cases} \quad (14)$$

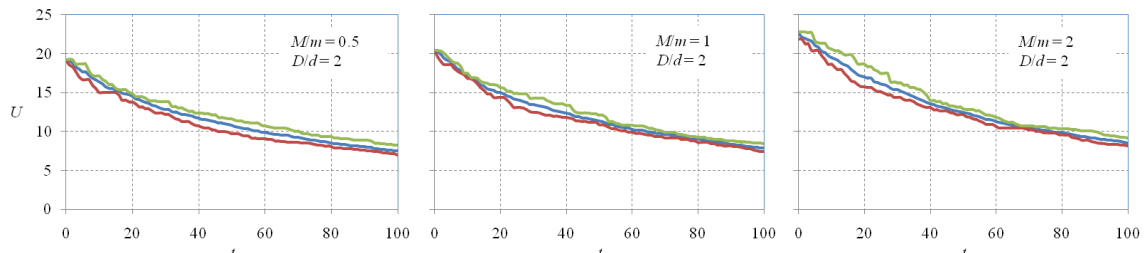
HASIL DAN DISKUSI

Untuk menghitung energi potensial dengan Persamaan (6) digunakan $G = 1$ dan rasio massa serta rasio diameter intruder dengan partikel bed divariasikan.

#t	i1	i2	state	U
0	5	1	<u>1</u> 000000001	19.246
1	3	1	1 <u>0</u> 00000001	19.246
2	5	9	1000010000	18.5961
3	0	3	0001010000	18.5203
4	3	8	0000010010	17.0035
5	6	5	000000 <u>1</u> 010	16.6032
6	7	2	00 <u>0</u> 0001010	16.6032
7	1	5	0 <u>0</u> 00001010	16.6032
8	8	3	0001001000	15.8765
9	3	0	1000001000	15.5738
10	0	7	0000001100	15.0043

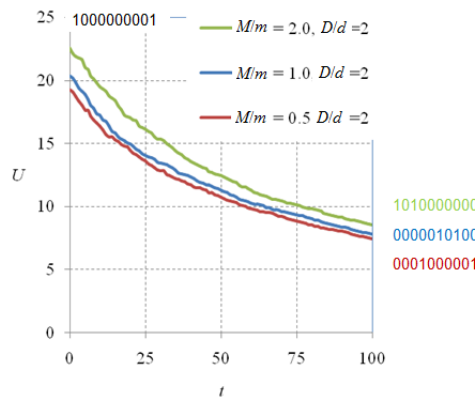
Gambar 2. Contoh data yang dihasilkan dari hasil perhitungan dengan $M/m = 0.5$ dan $D/d = 2$.

Intruder dilambangkan dengan angka 1 dan partikel bed dengan angka 0 dalam Gambar 2, di mana keadaan atau susunan partikel setiap saat diberikan dalam kolom keempat. Kolom pertama menggambarkan langkah iterasi, kolom kedua dan ketiga menggambarkan indeks putaran yang akan ditukar dan kolom terakhir menggambarkan energi potensial sistem. Bila butiran dapat ditukar maka posisi yang baru ditandai dengan font tebal, bila tidak ditandai dengan garis bawah.



Gambar 3. Penurunan energi potensial sistem U untuk: $M/m = 0.5, D/d = 2$ (kiri), $M/m = 1, D/d = 2$ (tengah), dan $M/m = 2, D/d = 2$ (kanan).

Dengan membuat intruder masih terlihat lebih besar ($D/d > 1$) variasi massa dilakukan untuk M/m bernilai 0.5, 1, dan 2. Ketiganya menunjukkan bahwa energi potensial sistem U dapat menurun dengan langkah-langkah yang diusulkan. Dan secara umum ($M/m \geq 1$) diperoleh bahwa kedua intruder akan mendekat, walaupun posisi akhir keduanya tidak harus di tengah-tengah sistem.



Gambar 4. Kaitan antara penurunan energi potensial U dengan keadaan akhir sistem partikel.

Untuk $M/m < 1$ terlihat bahwa energi potensial sistem akan lebih rendah apabila kedua intruder tidak terlalu dekat posisinya (garis merah dalam Gambar 4).

KESIMPULAN

Operator tukar telah dapat didefinisikan dan penurunan energi potensial sistem dapat dilakukan, sayangnya prediksi bahwa kedua intruder akan selalu berdekatan, yang merupakan ciri adanya gaya Casimir, tidak selalu terpenuhi, terutama untuk $M/m < 1$.

UCAPAN TERIMA KASIH

Penulis mengucapkan terima kasih pada Program Riset ITB tahun 2017, dengan nomor kontrak 107x/I1.C01/PL/2017, atas dukungannya pada penelitian ini dan rekan-rekan yang telah diajak berdiskusi.

REFERENSI

1. A Muriel, "One-dimensional gravitational gas", *Phys. Rev. A* **15** (1977) 341
2. P Valageas, "Relaxation of a one-dimensional gravitational system", *Phys. Rev. E* **74** (2006) 016606.
3. J Hietarinta, S Mikkola, "Chaos in the one-dimensional gravitational three-body problem", *Chaos* **3** (1993) 183.
4. S. Viridi, Y. Darma, "1-D Gravitation-Trapped-Granular-Gas as a Simple Counter Device", Proceedings of the 12th International Conference on Electronics, Information, and Communication (ICEIC 2013), Eds. S. J. Ko et al., Nusa Dua, Indonesia, 30 January - 2 February 2013, pp. 48-49.
5. E. Sustini, S. N. Khotimah, F. Iskandar, S. Viridi, "Molecular Dynamics Simulation of Smaller Granular Particles Deposition on a Larger One Due to Velocity Sequence Dependent Electrical Charge Distribution", in The 4th Nanoscience and Nanotechnology Symposium-2011, edited by F. Iskandar et al., AIP Conference Proceedings 1415, American Institute of Physics, Melville, NY, 2011, pp. 209-213.