Transformasi Simetri dalam Formalisme Hamiltonian dan Simetri BRST

Edyharto Yanuwar[a], Jusak Sali Kosasih[b]

Laboratorium Fisika Teoretik,
Kelompok Keilmuan Fisika Teoretik Energi Tinggi dan Instrumentasi,
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Institut Teknologi Bandung,
Jl. Ganesha no. 10 Bandung, Indonesia, 40132

[a] edyyanuwar@gmail.com (corresponding author)
[b] jusak@fi.itb.ac.id

Abstrak

Sistem terkendala (constrained system) dapat dinyatakan dalam formalisme Hamiltonian. Diantara semua kendala yang mungkin, first class constraints memainkan peran sebagai generator simetri gauge. Transformasi simetri gauge dalam formalisme Hamiltonian ini dibandingkan dengan simetri BRST. Simetri BRST sendiri adalah perluasan dari simetri gauge untuk mengatasi persoalan sistem terkendala. Ekivalensi keduanya terlihat dari generator simetri dan sifat-sifatnya. Sifat-sifat dari generator simetri yang ditinjau dan dibandingkan adalah hubungan komutasi antar generator yang kemudian membentuk grup dan simetri yang dihasilkan oleh generator dalam formalisme Hamiltonian.

Kata-kata kunci: generator simetri, kendala/constraint, simetri BRST, simetri gauge, sistem terkendala.

PENDAHULUAN

Dalam persoalan dinamika, variabel kanonik (q, p) tidak selalu bebas/independen, namun terdapat kasus dimana keduanya memiliki hubungan yang disebut kendala/*constraint*. Berdasarkan klasifikasi fungsi *first class* dan *second class*, *first class constraint* mengenerate simetri *gauge* dalam formalisme Hamiltonian. Sementara itu, simetri *gauge* dapat diperluas dalam simetri BRST dengan memperkenalkan derajat kebebasan *ghost*. Simetri BRST memiliki derajat kebebasan nonfisis (*ghost*) dan generator simetri bersifat *nilpotent*. Oleh karena itu, sifat generator kedua simetri dibandingkan untuk menunjukkan bahwa simetri *gauge* dalam formalisme Hamiltonian dan simetri BRST ekivalen, walaupun simetri BRST menyimpan derajat kebebasan nonfisis. Selain itu, transformasi BRST dan transformasi gauge dari variabel ruang fasa (q, p) memberikan hasil yang ekivalen dengan mensubstitusi parameter *gauge* dengan *ghost*.

Perluasan simetri ini dilakukan agar persoalan dinamika tidak lagi terbatas dalam *hypersurface* dari *constraints*, melainkan dapat dikerjakan pada seluruh ruang fasa dengan memanfaatkan sifat *nilpotent* dari generator simetri. Selain itu, untuk membentuk aksi (ter-*constraint*) yang invarian [1], yang sesuai dengan aksi yang diperoleh dari metode Faddeev-Popov [2]. Sebelumnya terdapat penelitian mengenai ekivalensi antara invariansi *gauge* dan simetri BRST [3], dan antara formalisme Lagrangian dan Hamiltonian BRST [4] berdasarkan sifat aljabar generator simetrinya.

SISTEM TERKENDALA

Teori gauge memiliki variabel dinamika yang ditentukan berdasarkan kerangka referensi yang pemilihannya bebas setiap saat. Dalam teori *gauge*, persamaan gerak tidak akan menentukan semua variabel dinamika untuk setiap waktu walaupun kondisi awal diberikan karena terdapat suatu fungsi waktu sembarang dalam solusi umum persamaan gerak. Hal ini menyiratkan bahwa tidak semua variabel kanonik independent, dan ada hubungan di antara mereka yang disebut kendala/*constraint*. Dengan demikian, sistem *gauge* selalu merupakan sistem Hamiltonian terkendala tetapi tidak semua kendala yang mungkin dari sistem Hamiltonian timbul dari invariansi *gauge* [5].

Berdasarkan penurunannya, kendala dibedakan menjadi *primary* dan *secondary constraints. Primary constraints* adalah sebuah hubungan antara koordinat dan momentum yang berlaku tanpa menggunakan persamaan gerak. *Primary constraints* hanya konsekuensi dari $p_n = \frac{\partial L(q,\dot{q})}{\partial \dot{q}^n}$ yang mendefinisikan variabel momentum. Jika hubungan antara p dan q bukan *primary constraints*, itu disebut *secondary constrainst*. *Secondary constraint* berlaku ketika persamaan gerak dipenuhi, tapi tidak perlu berlaku ketika persamaan gerak tidak dipenuhi. Sementara berdasarkan aljabarnya, kendala dibedakan menjadi *first class* dan *second class constraints*. *First class constraints* adalah kendala yang memenuhi aljabar *first class*. Fungsi $F(q,p)$ dikatakan *first class* jika kurung Poissonnya dengan setiap kendala bernilai nol di permukaan kendala

$$\{F, \phi_j\} \approx 0, \;\; j = 1, \dots J. \tag{1}$$

Fungsi variabel kanonik yang bukan *first class* disebut *second class*. Jadi $F(q,p)$ adalah *second class* jika ada setidaknya satu kendala sehingga kurung Poisson dengan $F(q,p)$ tidak bernilai nol dipermukaan kendala.

Simetri Gauge

Simetri adalah kejadian dimana suatu keadaan yang ditransformasi kembali ke keadaan semula. Terdapat berbagai macam simetri, karena perubahan apapun terhadap sistem yang membuat sistem tersebut kekal/kembali pada bentuk semula adalah suatu simetri.

Dalam teori gauge, solusi umum persamaan gerak memiliki fungsi sembarang. Pemilihan fungsi sembarang (katakanlah v^a dan $\widetilde{v^a}$) menyebabkan perbedaan nilai F setelah selang waktu δt yang dinyatakan sebagai

$$\delta F = \delta v^a \{F, \phi_a\}, \tag{2}$$

dengan $\delta v^a = \left(v^a - \widetilde{v^a}\right)\delta t$. Karena teori gauge tidak terpengaruh pemilihan kerangka referensi maka $\delta F = 0$ menyebabkan kurung Poisson $\{F, \phi_a\} = 0$ dan sebaliknya kurung Poisson fungsi *first class* $\{F, \phi_a\} = 0$ menyebabkan $\delta F = 0$. Oleh karena itu, transformasi (2) tidak mengubah keadaan fisis F setelah selang waktu δt. Dengan demikian dikatakan bahwa *first class constraint* membangkitkan transformasi *gauge.*

Dengan menerapkan prinsip variasi pada suatu Lagrangian $L\left(q^i, \dot{q}^i\right)$, akan diperoleh suatu besaran kekal/konstan yang dinamakan muatan Noether $G[\epsilon]$ hukum kekekalannya dinyatakan sebagai

$$\frac{dG[\epsilon]}{dt} = \epsilon^\alpha \dot{G}_\alpha^{[0]} + \dot{\epsilon}^\alpha \left(G_\alpha^{[0]} + \dot{G}_\alpha^{[1]}\right) + \cdots + \epsilon^{(n)^\alpha} \left(G_\alpha^{[n-1]} + \dot{G}_\alpha^{[n]}\right) + \cdots = 0. \tag{3}$$

Oleh karena itu, suatu simetri akan menimbulkan adanya besaran kekal $G[\epsilon]$ yang disebut muatan Noether [6].

Jika terjadi simetri hanya untuk $\epsilon =$ konstan (*rigid symmetry*), maka semua turunan dari ϵ bernilai nol dan seluruh orde $G_\alpha^{[n]}$ untuk $n \geq 1$ hilang, sehingga menyisakan satu komponen

$$\dot{G}_\alpha^{[0]} = g_\alpha = konsanta, \quad G[\epsilon] = \epsilon^\alpha g_\alpha \tag{4}$$

sebagaimana yang didefinisikan dalam lintasan klasik tertentu. Ini adalah teorema Noether yang menyatakan bahwa jika terdapat suatu simetri maka terdapat suatu besaran/muatan kekal.

Sementara itu, jika terjadi simetri untuk sembarang $\epsilon(t)$ bergantung waktu (simetri lokal), maka $\epsilon(t)$ dan seluruh turunannya independen. Sebagai hasilnya

$$\dot{G}_\alpha^{[0]} = 0, \quad \dot{G}_\alpha^{[1]} = -G_\alpha^{[0]}, \quad \ldots, \dot{G}_\alpha^{[n]} = -G_\alpha^{[n-1]}, \quad \ldots \tag{5}$$

Ketika dibatasi suatu nilai N sehingga $G_\alpha^{[N]} = 0$, maka $\dot{G}_\alpha^{[N]} = -G_\alpha^{[N-1]} = 0$, yang akan menyebabkan $G_\alpha^{[n]} = 0$ untuk $n = \{0,\ 1,\ \ldots,\ N-1\}$, sehingga $G[\epsilon] = 0$ dan $\frac{dG[\epsilon]}{dt} = 0$. Kedua kendala ini adalah kendala yang menghubungkan koordinat dan momentum pada lintasan klasik, mengingat bahwa $G_\alpha^{[n]} = p_i R_\alpha^{[n]i} - B_\alpha^{[n]}$ dan $\delta L = \delta q^i \frac{\partial L}{\partial q^i} + \delta \dot{q}^i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} = \frac{dB}{dt}$. Lebih jauh lagi, kendala ini memiliki sifat yang baik karena kekal terhadap evolusi waktu (3).

Muatan Noether yang telah diturunkan bersifat sebagai kendala, turunan terhadap waktu dari muatan Noether $G(q,p)$ tersebut dapat dinyatakan dalam

$$\dot{G} = \dot{q}^i \frac{\partial G}{\partial q^i} + \dot{p}_i \frac{\partial G}{\partial p_i} = \{G,\ H\} = 0, \tag{6}$$

dimana pun sepanjang trayektori dari sistem fisis dalam ruang fasa. Ambillah bahwa (6) terpenuhi, kemudian dapat dikonstruksi variasi dari (q,p) didefinisikan sebagai

$$\delta q^i = \{q^i, G\} = \frac{\partial G}{\partial p_i}, \quad \delta p_i = \{p_i,\ G\} = -\frac{\partial G}{\partial q^i} \tag{7}$$

dengan mengacu pada muatan Noether G yang membuat Hamiltonian invarian

$$\delta H = \delta q^i \frac{\partial H}{\partial q^i} + \delta p_i \frac{\partial H}{\partial p_i} = \frac{\partial H}{\partial q^i}\frac{\partial G}{\partial p_i} - \frac{\partial G}{\partial q^i}\frac{\partial H}{\partial p_i} = \{H,\ G\} = 0. \tag{8}$$

Variasi variabel kanonik merepresentasikan transformasi infinitesimal dari simetri yang diberikan oleh persamaan $\{G,\ H\} = 0$, dan karenanya persamaan (8) dipenuhi sebagai identitas, terlepas dari apakah koordinat ruang fasa (q,p) memenuhi persamaan gerak atau tidak. Disini ditunjukkan bahwa suatu besaran yang kekal terhadap waktu (G) membangkitkan suatu simetri (invers teorema Noether) [6]. Sehingga G berlaku sebagai generator.

Keuntungan lebih jauh, yaitu struktur grup infinitesimal dari transformasi dapat diperiksa secara langsung. Menganggap bahwa dua generator simetri G_α dan G_β memenuhi $\{G,\ H\} = 0$ maka identitas Jacobi dengan kurung Poisson memberikan

$$\left\{\{G_\alpha,\ G_\beta\},\ H\right\} = \left\{G_\alpha,\ \{G_\beta,\ H\}\right\} - \left\{G_\beta, \{G_\alpha, H\}\right\} = 0. \tag{9}$$

Sehingga jika himpunan generator $\{G_\alpha\}$ lengkap, harus ada identitas dalam bentuk

$$\left\{G_\alpha,\ G_\beta\right\} = P_{\alpha\beta}(G) = -P_{\beta\alpha}(G), \tag{10}$$

dengan $P_{\alpha\beta}(G)$ adalah polynomial dalam besaran konstan G_α, dengan mengambil bentuk sebagai

$$P_{\alpha\beta}(G) = c_{\alpha\beta} + f_{\alpha\beta}{}^{\gamma} G_\gamma + \frac{1}{2} g_{\alpha\beta}{}^{\gamma\delta} G_\gamma G_\delta + \cdots \tag{11}$$

Koefisien $c_{\alpha\beta}$, $f_{\alpha\beta}{}^{\gamma}$, $g_{\alpha\beta}{}^{\gamma\delta}$, ... konstan dan memiliki Poisson *bracket* bernilai nol dengan fungsi ruang fasa apapun. Suku pertama $c_{\alpha\beta}$ biasa disebut sebagai *central charge*.

Kendala $G_\alpha = 0$ mendefinisikan permukaan *hypersurface* di ruang fasa di mana semua trayektori fisis terbatas. Ini menyiratkan bahwa kendala harus komut dengan Hamiltonian pada *physical hypersurface (on shell*). Di luar *hypersurface (off shell)*, kurung Poisson dari Hamiltonian dengan kendala bisa bernilai apapun, karena trayektori fisis tidak pernah memasuki daerah ini dari ruang fasa. Sehingga struktur aljabar yang paling umum yang diizinkan adalah

$$\{G_\alpha,\, G_\beta\} = P_{\alpha\beta}(G),\ \{H,\, G_\alpha\} = Z_\alpha(G), \tag{12}$$

dengan $P_{\alpha\beta}(G)$ dan $Z_\alpha(G)$ adalah polinomial dalam kendala dengan sifat $P_{\alpha\beta}(0) = Z_\alpha(0) = 0$. Ini cukup untuk memastikan bahwa dalam sektor fisis dalam ruang fasa $\{H,\, G_\alpha\}|_{G_\alpha=0} = 0$. Perlu dicatat bahwa dalam simetri lokal G_α mendefinisikan kendala, *central charge* dari kurung antar kendala harus nol, $c_{\alpha\beta} = 0$, agar menjaga struktur aljabar $\{G_\alpha,\, G_\beta\} = P_{\alpha\beta}(G)$ di permukaan *hypersurface*. Dengan demikian muatan Noether bertindak sebagai *first class constraints*.

Kendala $G_\alpha = 0$ pasti komut dengan Hamiltonian hanya di *on shell*, sementara di *off shell* bisa bernilai apapun. Hal ini mengindikasikan bahwa simetri hanya terjadi di *on shell*/permukaan fisis saja. Simetri ini diperluas agar berlaku diseluruh ruang fasa dengan memodifikasi generator dan Hamiltoniannya. Modifikasi ini mengubah aljabar *first class* menjadi bersifat nilpotent yang kurung Poissonnya di seluruh ruang fasa nol, sehingga generator tersebut pasti komut dengan Hamiltonian di seluruh ruang fasa.

Simetri BRST

Ada beberapa cara untuk mengatasi masalah kendala. Cara yang paling jelas adalah menyelesaikannya dan merumuskan teorinya murni dalam derajat kebebasan fisis. Namun, ini hanya mungkin dalam kasus yang paling sederhana, seperti partikel relativistik atau teori *gauge* Abelian (elektrodinamika). Oleh karena itu dalam banyak kasus dan untuk sebagian besar aplikasi diperlukan strategi alternatif. Strategi ini adalah untuk menjaga (beberapa) derajat kebebasan yang tidak fisis dalam teori sedemikian rupa sehingga sifat-sifat yang diinginkan dari deskripsi, seperti lokalitas, dan rotasi atau Lorentz-*invariance*, dapat dipertahankan pada tahap perhitungan menengah [6]. Dalam bab ini dibahas metode untuk menghadapi situasi seperti itu, ketika derajat kebebasan yang tidak fisis diambil dalam analisis dinamika.

Berdasarkan sistem dinamika umum yang diwakili oleh himpunan kendala $G_\alpha = 0$, ambil aljabar dari kendala-kendala ini menjadi *first class constraints*. Konstruksi BRST dimulai dari pengenalan pasangan kanonik derajat kebebasan Grassmann yaitu $(c^\alpha, \bar{c}_\beta)$, dengan c^α dan $\bar{c}_\alpha$ untuk setiap kendala G_α, dan memenuhi kurung Poisson [1, 7]

$$\{c^\alpha, \bar{c}_\beta\} = \{\bar{c}_\beta, c^\alpha\} = -i\delta^\alpha_\beta. \tag{13}$$

Variabel antikomut ini dikenal sebagai *ghost*. Kurung Poisson lengkap pada ruang fasa diperluas diberikan oleh

$$\{A,\, B\} = \frac{\partial A}{\partial q^i}\frac{\partial B}{\partial p_i} - \frac{\partial A}{\partial p_i}\frac{\partial B}{\partial q^i} + i(-1)^A\left(\frac{\partial A}{\partial c^\alpha}\frac{\partial B}{\partial \bar{c}_\alpha} + \frac{\partial A}{\partial \bar{c}_\alpha}\frac{\partial B}{\partial c^\alpha}\right), \tag{14}$$

dengan $(-1)^A$ menotasikan paritas Grassmann dari A. Bernilai $+1$ jika A adalah variabel *Grassmann-even* (hubungan komutasi), dan bernilai -1 jika A merupakan variabel *Grassmann-odd* (hubungan antikomutasi).

Dengan bantuan dari derajat kebebasan ghost ini, dapat didefinisikan muatan BRST berdasarkan formalisme Hamiltonian sebagai Ω, yang memiliki paritas Grassmann $(-1)^\Omega = -1$, sebagai [2]

$$\Omega = c^\alpha(G_\alpha + M_\alpha), \tag{15}$$

dengan M_α adalah variabel Grassmann-even dan memiliki bentuk

$$M_\alpha = \sum_{n\geq 1} \frac{i^n}{2n!} c^{\alpha_1} \ldots c^{\alpha_n} M_{\alpha\alpha_1\ldots\alpha_n}^{\ \beta_1\ldots\beta_n} \bar{c}_{\beta_1} \ldots \bar{c}_{\beta_n} = \frac{i}{2} c^{\alpha_1} M_{\alpha\alpha_1}^{\ \beta_1} \bar{c}_{\beta_1} - \frac{1}{4} c^{\alpha_1} c^{\alpha_2} M_{\alpha\alpha_1\alpha_2}^{\ \beta_1\beta_2} \bar{c}_{\beta_1}\bar{c}_{\beta_2} + \cdots \tag{16}$$

Kuantitas $M_{\alpha\alpha_1\ldots\alpha_n}^{\ \beta_1\ldots\beta_n}$ adalah fungsi dalam variabel ruang fasa klasik melalui kendala G_α dan didefinisikan sedemikian sehingga

$$\{\Omega, \Omega\} = 0. \tag{17}$$

Selanjutnya perhatikan bahwa, Hamiltonian $H = H_o$ dapat diperluas dengan suku *ghost* dalam bentuk

$$H_c = H_o + \sum_{n\geq 1} \frac{i^n}{n!} c^{\alpha_1} \dots c^{\alpha_n} h^{(n)\beta_1\dots\beta_n}_{\alpha_1\dots\alpha_n}(G) \bar{c}_{\beta_1} \dots \bar{c}_{\beta_n}, \;\; \{\Omega, H_c\} = 0. \qquad (18)$$

Dalam *physical hypersurface* dalam ruang fasa, Hamiltonian ini serupa dengan modulo Hamiltonian klasik asli yang tidak mempengaruhi evolusi waktu dari variabel ruang fasa klasik $(q,\, p)$. Ilustrasikan prosedur tersebut dengan mengkonstruksi suku pertama sebagai berikut

$$\{\Omega, H_c\} = \{c^\alpha G_\alpha,\, H_o\} + \frac{i}{2}\left\{c^\alpha G_\alpha,\, c^\gamma h^{(1)\beta}_\gamma \bar{c}_\beta\right\} + \frac{i}{2}\left\{c^{\alpha_1} c^{\alpha_2} M^\beta_{\alpha_1\alpha_2} \bar{c}_\beta,\, H_o\right\} + \cdots = c^\alpha \left(Z_\alpha - h^{(1)\beta}_\alpha G_\beta\right) + \cdots \qquad (19)$$

Suku di dalam kurung bernilai nol jika Hamiltonian diperluas suku *ghost* sehingga

$$h^{(1)\beta}_\alpha(G) G_\beta = Z_\alpha(G). \qquad (20)$$

Persamaan ini dijamin memiliki solusi dengan kondisi $Z_\alpha(0) = 0$.

Karena muatan BRST komut dengan Hamiltonian yang diperluas oleh medan *ghost*, maka dapat digunakan untuk membangkitkan transformasi simetri yang bergantung *ghost* terhadap variabel ruang fasa klasik, yang dikenal sebagai transformasi BRST

$$\delta_\Omega q^i = -\{\Omega,\, q^i\} = \frac{\partial \Omega}{\partial p_i} = c^\alpha \frac{\partial G_\alpha}{\partial p_i} + \text{suku } ghost\ extention \qquad (21)$$

$$\delta_\Omega p_i = -\{\Omega,\, p_i\} = -\frac{\partial \Omega}{\partial q^i} = -c^\alpha \frac{\partial G_\alpha}{\partial q^i} + \text{suku } ghost\ extention \qquad (22)$$

Transformasi BRST ini hanyalah transformasi *gauge* dengan parameter ϵ^α diganti dengan variabel *ghost* c^α, (memungkinkan) ditambah suatu suku tambahan yang bergantung medan *ghost*. Demikian pula, dapat didefinisikan transformasi BRST dari *ghost*

$$\delta_\Omega c^\alpha = -\{\Omega,\, c^\alpha\} = i\frac{\partial \Omega}{\partial \bar{c}_\alpha} = -\frac{1}{2} c^\beta c^\gamma M_{\beta\gamma}{}^\alpha + \cdots \qquad (23)$$

$$\delta_\Omega \bar{c}_\alpha = -\{\Omega,\, \bar{c}_\alpha\} = i\frac{\partial \Omega}{\partial c^\alpha} = iG_\alpha - c^\beta M_{\alpha\beta}{}^\gamma \bar{c}_\gamma + \cdots \qquad (24)$$

Sifat yang penting dalam transformasi ini adalah sifat nilpotent, bahwasannya

$$\delta^2_\Omega = 0. \qquad (25)$$

Sifat ini diperoleh langsung dari identitas Jacobi untuk kurung Poisson dari muatan BRST dengan suatu fungsi ruang fasa sembarang A sebagai

$$\delta^2_\Omega A = \{\Omega,\, \{\Omega,\, A\}\} = -\frac{1}{2}\{A,\, \{\Omega,\, \Omega\}\} = 0. \qquad (26)$$

KESIMPULAN

Muatan Noether BRST merupakan perluasan dari muatan Noether simetri gauge dengan menggunakan medan *ghost.* Muatan Noether pada simetri gauge bersifat *first class* sehingga kurung Poissonnya nol di permukaan kendala, namun diluar permukaan kendala nilainya bisa apapun. Pada simetri BRST kurung Poisson antar muatan di seluruh ruang fasa dibuat bernilai nol dengan cara memperluas muatan Noether dengan variabel *ghost.* Perluasan ini mengakibatkan transformasi besaran kanonik diperluas dengan suku *ghost* sebagaimana diberikan pada (21) dan (22). Sementara itu, medan ghost juga mengalami transformasi BRST sebagaimana dalam (23) dan (24). Demikian pula pada Hamiltonian, dalam pengaruh medan ghost Hamiltonian diperluas sehingga bersifat BRST invarian.

REFERENSI

1. Becchi, C., Rouet, A., & Stora, R. *Renormalization of Gauge Theories*. Annals of Physics 98, 287-321. (1976).
2. Faddeev, L. D., Popov, V. *Feynman diagrams for the Yang-Mills field.* Phys. Lett. B, **25** (1): 29. (1967).
3. Nemeschansky, D. *A BRST Primer.* SLAC-PUB-4422. (1987)

4. Nirov, K. S., Razumov, A. V. *Equivalence between Lagrangian and Hamiltonian BRST Formalisms.* Nucl. Phys. B. (1991)
5. Henneaux, M., & Teitelboim, C. *Quantization of Gauge Systems.* Princeton, New Jersey: Princeton University Press. (1991).
6. van Holten, J. W. *Aspects of BRST Quantization*. arXiv:hep-th/0201124v1. (2002).
7. Tyutin, I. V. *Gauge Invariance in Field Theory and Statistical Physics in Operator Formalism.* P.N. Lebedev Institute of Physics, N0.39. (1975).