

Pemodelan Pertumbuhan Populasi Mikroba Multi-Jenis Tak-Berinteraksi Dengan Variasi Keadaan Awal Dan Koefisien Pertumbuhan Masing-Masing Jenis

Sparisoma Viridi^{1,a)}, Souvia Rahimah^{2,b)}

¹Department of Physics, Faculty of Mathematics and Natural Sciences, Institut Teknologi Bandung, Jalan Ganesha 10, Bandung, 40132, Indonesia

²Department of Food Industrial Technology, Faculty of Agro-industrial Technology, Universitas Padjadjaran, Jalan Raya Bandung Sumedang KM 21, Sumedang 45363, Indonesia

^{a)}dudung@fi.itb.ac.id (corresponding author)

^{b)}souvia@unpad.ac.id

Abstrak

Pertumbuhan populasi beberapa jenis mikroorganisme dalam suatu lingkungan yang sama dimodelkan dengan beberapa persamaan logistik yang saling tidak berinteraksi, yang perbedaan satu persamaan dengan lainnya adalah pada syarat awal, koefisien pertumbuhan, dan kapasitas maksimumnya. Perbedaan ketiga parameter ini menggambarkan perbedaan jenis mikroorganisme yang berinteraksi dengan sistem yang dibahas. Diasumsikan bahwa jumlah mikroorganisme pada suatu waktu t hanya dapat diketahui jumlah totalnya dan apa saja jenisnya, tanpa dapat mengetahui jumlah masing-masing jenisnya. Dengan menjalankan simulasi untuk beberapa saat dapat diperoleh kurva pertumbuhan masing-masing jenis mikroorganisme dan juga kurva pertumbuhan totalnya yang merupakan data agregat dari masing-masing jenis. Ditunjukkan bahwa suatu keadaan awal dan akhir tertentu sistem total dapat dibentuk oleh berbagai keadaan awal dan akhir dari masing-masing jenis, yang akan dapat membuat bias penafsiran dari data yang diperoleh. Suatu batasan diusulkan agar hasil yang diperoleh dapat bersifat lebih spesifik.

Kata-kata kunci: model pertumbuhan, multi-spesies, populasi mikroba.

PENDAHULUAN

Pemodelan matematika pertumbuhan suatu populasi masih merupakan hal yang menarik untuk dikaji dikarenakan kerumitan sistem yang diwakilinya. Terdapat bentuk persamaan logistik umum [1], yang dengan pengaturan nilai-nilai parameternya dapat mengakomodasi hukum Malthus dan persamaan logistik Verhulst [2], akan tetapi kemudian memerlukan pendekatan deret bila ingin menghindari perhitungan terkait tundaan waktu setelah faktor tersebut diperhitungkan dalam sistem [3]. Pada populasi mikroba bentuk hukum Malthus digunakan dalam menentukan distribusi umur anggota populasi [4], yang distribusinya akan menjadi berbeda bila mikroorganisme bukan mengalami keadaan tunak pertumbuhan eksponensial sesuai hukum Malthus, akan tetapi mengalami keadaan tunak kemostat yang menjaga tetapnya jumlah sel dalam sistem yang diamati [5]. Dengan demikian, eksperimen

penumbuhan mikroorganisme amat bergantung pada perancangan sistem yang digunakan, seperti bila nutrisi diberikan berlebih kontrol pertumbuhan populasi merupakan faktor internal, akan tetapi bila nutrisi dibatasi kontrol pertumbuhan menjadi faktor eksternal [6]. Bila dilihat dari sel sebagai individu, di mana sebelumnya hanya memperhatikan jumlah sel atau populasinya, variasi waktu pembelahan akan memerlukan jumlah dan laju sintesis DNA yang berbeda, dengan ukuran sel saat lahir juga berbeda [7], yang dapat didekati dengan model deterministik dan probabilistik siklus sel [8], ataupun dengan model matematika yang amat detil sampai memperhitungkan proses sintesis, dekomposisi, saturasi, degradasi, dan transpor dalam sel, serta pencabangan molekul DNA [9]. Di antara kedua skala tersebut, populasi dan sel, telah dikembangkan pula semacam model berbasis granular dalam 2-d yang menggambarkan pertumbuhan koloni *Saccharomyces cerevisiae* secara aseksual yang populasinya cocok dengan pertumbuhan eksponensial sebagaimana teramati [10] dan dalam investigasi lebih lanjut variasi situs pertumbuhan akan menentukan formasi koloni [11].

Susu merupakan media yang menarik untuk dipelajari karena padanya terdapat lebih dari satu jenis mikroba berbeda [12], yang salah satu sumber pencemarannya dapat berupa wadah plastik yang digunakan berulang tanpa dibersihkan dengan baik [13], dan khusus untuk susu kuda Sumbawa di dalamnya telah terdapat anti-mikroba [14]. Terdapat pemodelan *Staphylococcus aureus* dengan memodifikasi persamaan logistik yang dapat mengaitkan jumlah populasi dengan produksi enterotoksinya [15] serta mengakomodasi ketiga fasa perkembangan (lag, eksponensial, dan maksimum) yang telah dicoba untuk lima jenis mikroorganisme [16], yang akan digunakan dalam penelitian ini dengan melibatkan berbagai jenis mikroorganisme yang ada secara bersamaan, akan tetapi interaksi tak langsung antara dua populasi seperti kompetisi, komensalisme, mutualisme-protokolaborasi, dan interaksi langsung seperti predasi, parasitisme, serta interaksi antara tiga populasi [17], diabaikan. Masing-masing jenis diasumsikan memiliki populasi awal dan koefisien pertumbuhan tertentu yang saling berkontribusi pada perhitungan jumlah mikroorganisme. Akan ditunjukkan bahwa dapat muncul berbagai konfigurasi jenis mikroorganisme berbeda yang menuju pada hasil observasi yang mirip.

MODEL

Persamaan logistik

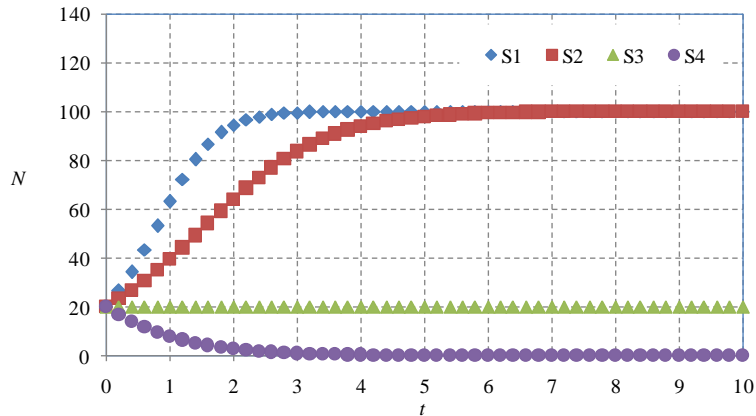
Bentuk persamaan logistik Verhulst yang telah umum dikenal, dapat dituliskan dalam bentuk yang lebih umum [1](Tsoularis & Wallace, 2002)

$$\frac{dN}{dt} = kN^{\alpha} \left[1 - \left(\frac{N}{N_{\max}} \right)^{\beta} \right]^{\gamma}, \quad (1)$$

dengan $\alpha, \beta, \gamma > 0$. Konstanta k mendefinisikan laju pertumbuhan dan N_{\max} adalah jumlah populasi maksimum dengan daya dukung yang tersedia. Dengan memilih $\alpha = \beta = \gamma = 1$ akan diperoleh bentuk yang telah umum dikenal

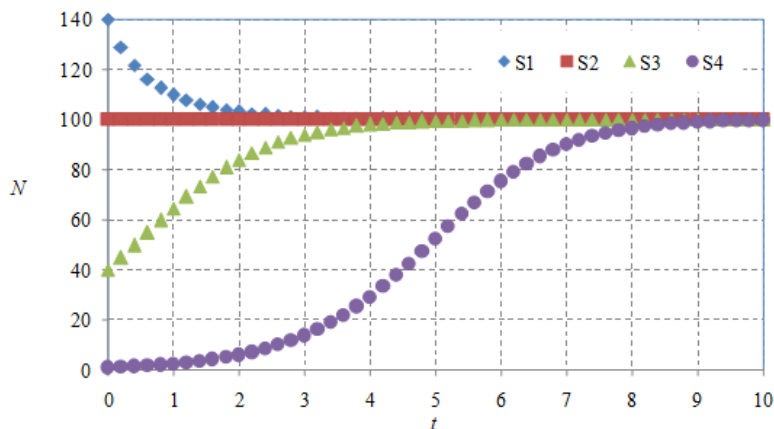
$$\frac{dN}{dt} = kN \left(1 - \frac{N}{N_{\max}} \right), \quad (2)$$

yang akan digunakan dalam penelitian ini. Dengan melihat bentuk Persamaan (2) terdapat tiga parameter yang dapat divariasikan yaitu k dan N_{\max} , serta syarat awal $N(0)$.



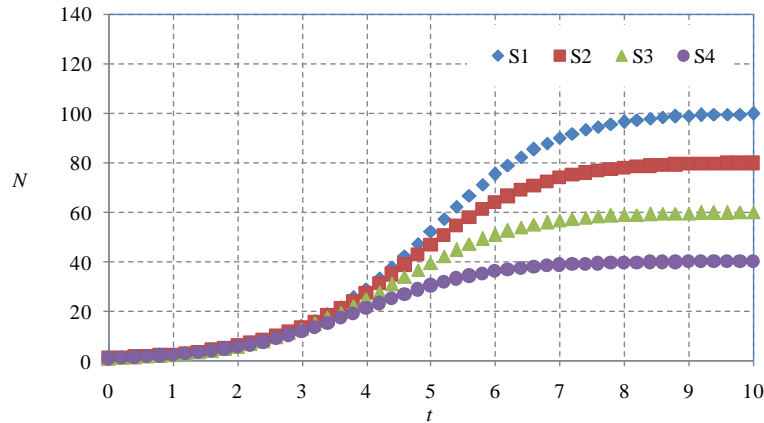
Gambar 1. Kurva pertumbuhan dengan $N_0 = 20$ dan $N_{max} = 100$ untuk k : 2 (S1), 1 (S2), 0 (S3), -1 (S4).

Variasi nilai k akan menentukan perubahan kurva pertumbuhan $N(t)$ sebagaimana ditunjukkan Gambar 1. Nilai $k > 0$ akan membuat pertumbuhan positif, $k = 0$ membuat tidak ada pertumbuhan atau nilai $N(t) = N(0)$, dan $k < 0$ membuat pertumbuhan negatif.



Gambar 2. Kurva pertumbuhan dengan $N_{max} = 100$ dan $k = 1$ untuk N_0 : 140 (S1), 100 (S2), 40 (S3), 1 (S4).

Nilai awal $N(0) = N_0$ akan menentukan apakah ke arah mana arah pertumbuhan terjadi, seperti bila $N_0 > N_{max}$ pertumbuhan akan negatif, $N_0 = N_{max}$ tidak terjadi pertumbuhan, $N_0 < N_{max}$ pertumbuhan positif, sebagai mana diilustrasikan dalam Gambar 2.



Gambar 3. Kurva pertumbuhan dengan $N_0 = 1$ dan $k = 1$ untuk N_{\max} : 100 (S1), 80 (S2), 60 (S3), 40 (S4).

Nilai N_{\max} yang merupakan populasi maksimum untuk daya dukung yang tersedia akan menentukan nilai akhir populasi sebagaimana diberikan dalam Gambar 3. Solusi dari Persamaan (2) akan memberikan

$$N(t) = N_0, \quad (3)$$

dan

$$N(t) = N_{\max}. \quad (4)$$

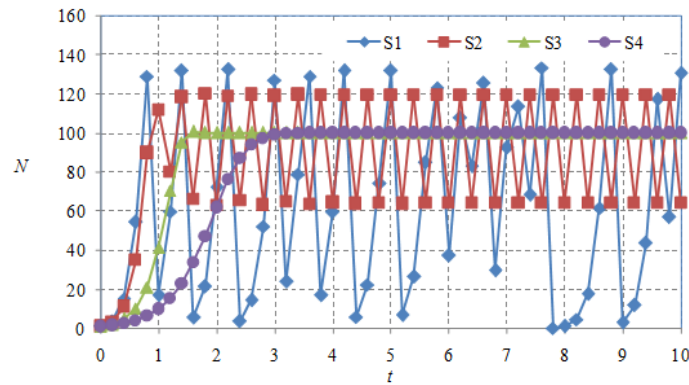
Bila Persamaan (2) tidak dimodifikasi, maka Persamaan (3) dan (4) tidak perlu menggunakan waktu t menuju ke suatu nilai, akan tetapi cukup saat t sama dengan suatu nilai tersebut. Pendekatan menuju suatu nilai tertentu diperlukan apabila solusi $N(t)$ tidak kontinu pada nilai tersebut atau menuju tak-berhingga.

Penyelesaian numerik

Persamaan (2) dapat diselesaikan secara analitik maupun numerik. Dalam penelitian ini penyelesaian secara numerik dipilih dengan menggunakan algoritma Euler yang akan memberikan solusi

$$N(t + \Delta t) = N(t) + kN(t) \left[1 - \frac{N(t)}{N_{\max}} \right] \Delta t, \quad (5)$$

yang dalam penyelesaiannya dipengaruhi oleh nilai $k\Delta t$. Perkalian kedua parameter ini akan menentukan apakah hasil yang diperoleh merupakan solusi yang dicari atau hanya merupakan artefak numerik yang hasilnya belum dapat digunakan untuk analisis.

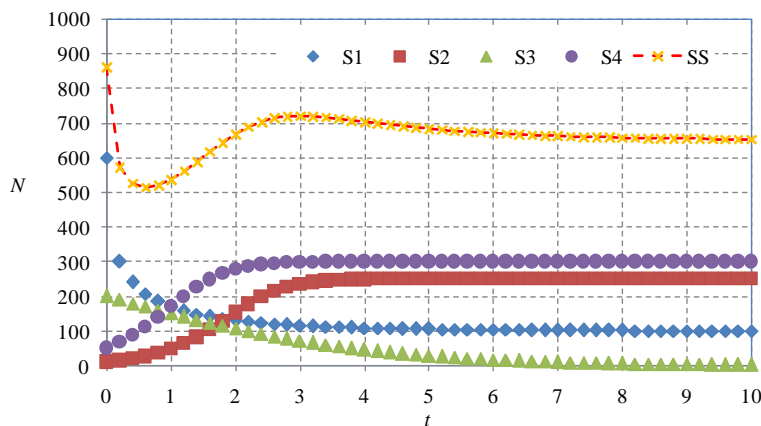


Gambar 4. Kurva pertumbuhan dengan $N_0 = 1$, $N_{max} = 100$, dan $k = 6$ untuk Δt : 0.5 (S1), 0.4 (S2), 0.2 (S3), 0.1 (S4).

Nilai $k\Delta t$ yang cukup baik dalam hal ini adalah yang bernilai kurang dari 0.6 sebagaimana diberikan oleh Gambar 4. Untuk contoh-contoh dalam Gambar 1-3 digunakan $k\Delta t \leq 0.4$, yang masih kurang dari 0.6. Perhatikan dalam Gambar 4, terutama untuk $\Delta t = 0.5$ atau $k\Delta t = 3$ terdapat nilai-nilai acak yang bukan merupakan nilai sebenarnya akan tetapi hanya artefak numerik dikarenakan syarat algoritma Euler yang memberikan Persamaan (5) haruslah memiliki nilai Δt yang cukup kecil relatif terhadap suatu nilai tertentu, yang secara fisis dapat dikonfirmasi. Dalam penelitian ini digunakan $k\Delta t < 0.6$ yang belum menggunakan acuan tertentu.

Pertumbuhan empat jenis tak berinteraksi tanpa batasan N_{max}

Dengan menggunakan solusi dari Persamaan (5) dapat dihitung pertumbuhan empat jenis populasi ($M = 4$) berbeda yang memiliki nilai N_0 , N_{max} , dan k masing-masing. Bila jumlah total populasi, dari keempat populasi, dapat diamati dalam observasi akan diperoleh bentuk variasi kurva yang cukup menarik sebagaimana diberikan dalam Gambar 5.



Gambar 5. Kurva pertumbuhan populasi berbagai jenis untuk $N = 4$, dengan: $N_0 = 600$, $N_{max} = 100$, $k = 0.5$ (S1), $N_0 = 10$, $N_{max} = 250$, $k = 2$ (S2), $N_0 = 200$, $N_{max} = 400$, $k = -0.5$ (S3), $N_0 = 50$, $N_{max} = 300$, $k = 2$ (S4), dan $S1 + S2 + S3 + S4$ (SS).

Ilustrasi dalam Gambar 5 populasi total disajikan dengan kurva putus-putus dengan marka \times (SS) yang merupakan jumlah dari populasi yang menurun menuju populasi maksimumnya

(S1), populasi yang menaik menuju populasi maksimumnya (S2 dan S4), dan populasi yang menurun menuju kepunahan (S3).

Pertumbuhan empat jenis tak berinteraksi dengan batasan N_{max}

Walaupun keempat populasi, masih suatu ilustrasi dengan $M = 4$, tidak saling berinteraksi, dengan mengasumsikan batasan daya dukung, dapat dipilih bahwa pada setiap saat t berlaku

$$\sum_{i=1}^M N_{max,i} = N_{max} \tag{6}$$

yang berarti bahwa perlu dibuat aturan bagaimana menentukan $N_{max,i}$ bila tidak bernilai tetap sepanjang waktu t . Untuk penyederhanaan dapat didefinisikan suatu larik berukuran M yang berisikan nilai fraksional

$$\mathbf{c} = [c_1 \quad c_2 \quad \dots \quad c_M], \tag{7}$$

yang memenuhi kondisi

$$\sum_{i=1}^M c_i = 1, \tag{8}$$

sehingga dapat dituliskan bahwa

$$c_i N_{max,i} = N_{max}, \tag{9}$$

yang akan memenuhi syarat dalam Persamaan (6). Selain untuk C , dapat pula dituliskan N_0 dan k dalam bentuk seperti Persamaan (7), yaitu

$$\mathbf{N}_0 = [N_{0,1} \quad N_{0,2} \quad \dots \quad N_{0,M}], \tag{10}$$

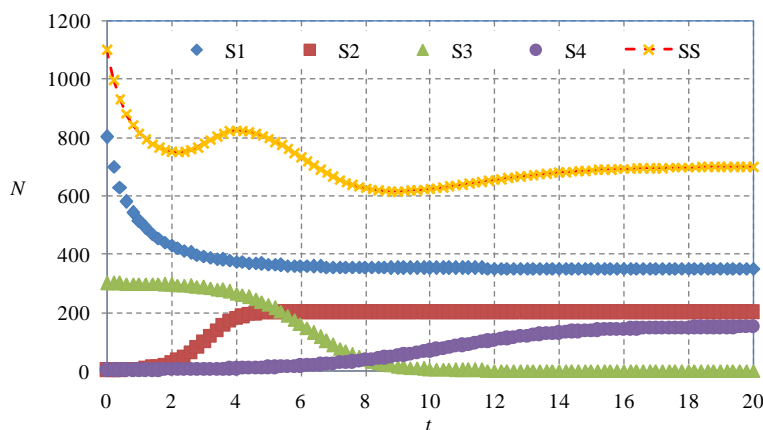
dan

$$\mathbf{k} = [k_1 \quad k_2 \quad \dots \quad k_M], \tag{11}$$

dengan kondisi

$$\sum_{i=1}^M N_{0,i} \leq N_{max} \tag{12}$$

tidak perlu selalu dipenuhi.



Gambar 6. Kurva pertumbuhan populasi dengan batasan N_{max} untuk $\mathbf{c} = [0.35 \quad 0.2 \quad 0.3 \quad 0.15]$, $\mathbf{N}_0 = [800 \quad 1 \quad 299 \quad 1]$, dan $\mathbf{k} = [0.5 \quad 2 \quad -1 \quad 0.5]$.

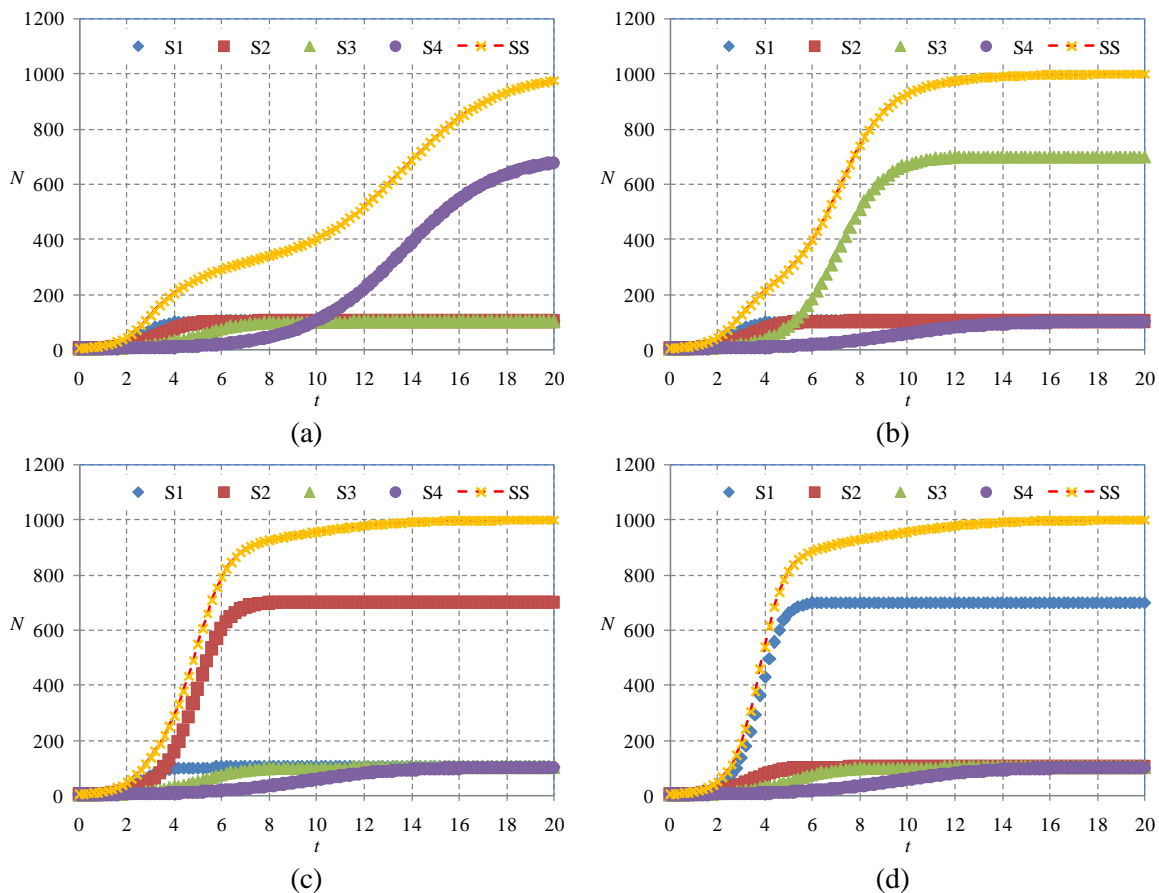
Kurva pertumbuhan dengan dua nilai minimum lokal sebagaimana diberikan dalam Gambar 6 dapat diperoleh dengan membatasi N_{max} dengan $\mathbf{c} = [0.35 \quad 0.2 \quad 0.3 \quad 0.15]$, $\mathbf{N}_0 = [800 \quad 1 \quad 299 \quad 1]$, $\mathbf{k} = [0.5 \quad 2 \quad -1 \quad 0.5]$, yang menunjukkan fleksibilitas model yang diajukan dalam membuat berbagai jenis kurva pertumbuhan populasi mikroorganisme.

HASIL DAN DISKUSI

Simulasi dilakukan menggunakan Persamaan (5) dengan menerapkan Persamaan (7) – (11) dan batasan parameter $k\Delta t \leq 0.4$. Dari hasil yang diperoleh akan dipadankan antara nilai N_0 dan N (saat simulasi dihentikan dan dianggap bahwa keadaan tunak telah tercapai).

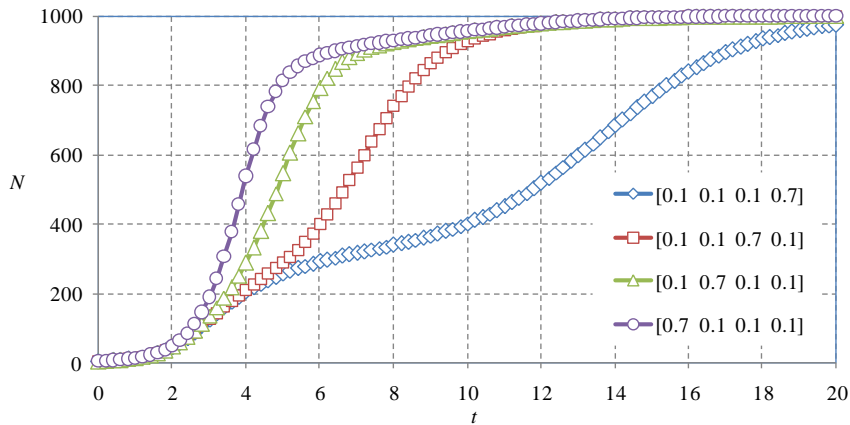
Variasi c

Dengan menggunakan $N_{max} = 1000$, $\Delta t = 0.2$ jam, $N_0 = [1 \ 1 \ 1 \ 1]$, dan $\mathbf{k} = [2 \ 1.5 \ 1 \ 0.5]$ dapat diperoleh hasil yang ditunjukkan oleh Gambar 7, dengan semua populasi memiliki pertumbuhan positif dan $N_{0,i} < N_{max,i}$.



Gambar 7. Kurva pertumbuhan dengan variasi c: (a) [0.1 0.1 0.1 0.7], (b) [0.1 0.1 0.7 0.1], (c) [0.1 0.7 0.1 0.1], dan (d) [0.7 0.1 0.1 0.1].

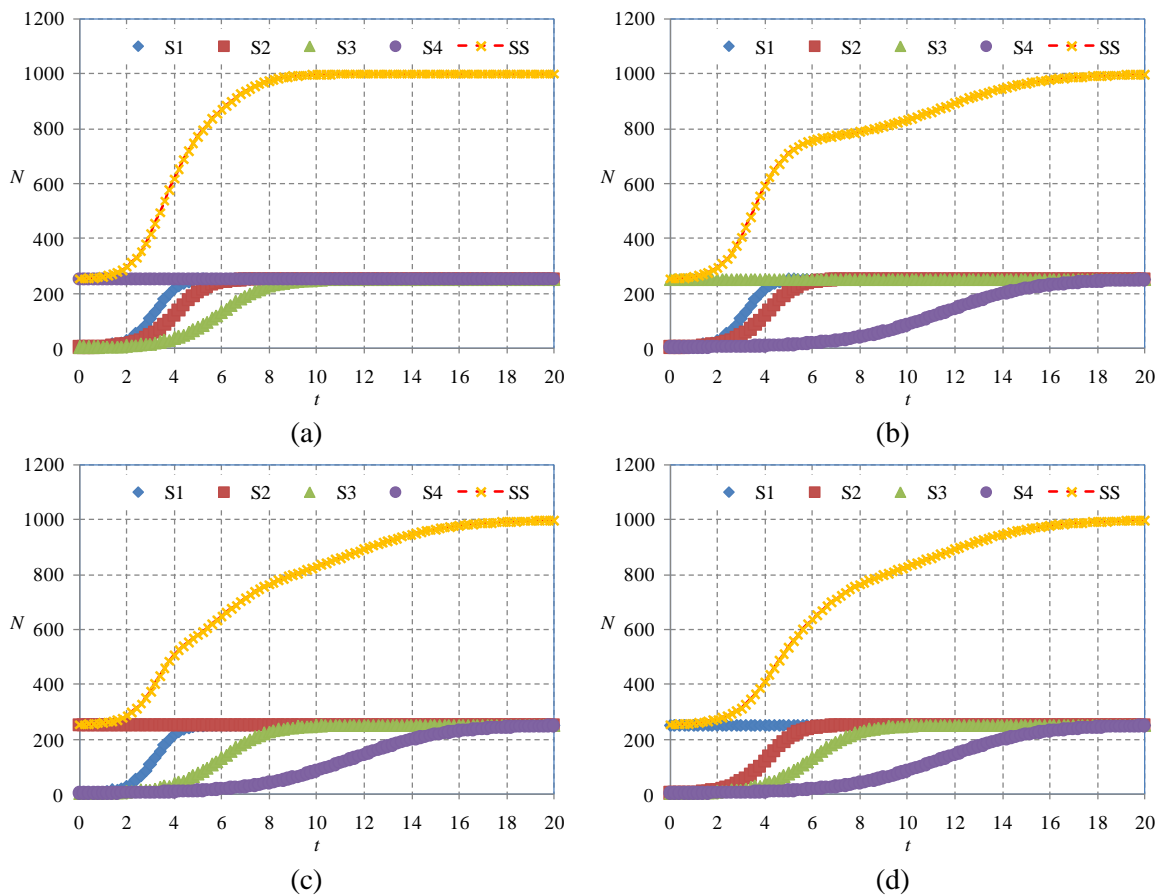
Dalam rentang pengamatan yang dilakukan, yaitu $t \in [0, 20]$, dapat dilihat bahwa untuk $t > 20$ jam kondisi saturasi telah tercapai sehingga bila dilakukan pengukuran atau sampling setelah waktu tersebut hasil yang diperoleh akan sama. Akan tetapi apabila sampling dilakukan kurang dari waktu tersebut hasil yang diperoleh akan berbeda. Lebih jelasnya dapat dilihat dalam Gambar 8 berikut.



Gambar 8. Kurva pertumbuhan dengan variasi \mathbf{c} : [0.1 0.1 0.1 0.7] (\diamond), [0.1 0.1 0.7 0.1] (\square), [0.1 0.7 0.1 0.1] (Δ), dan [0.7 0.1 0.1 0.1] (\circ).

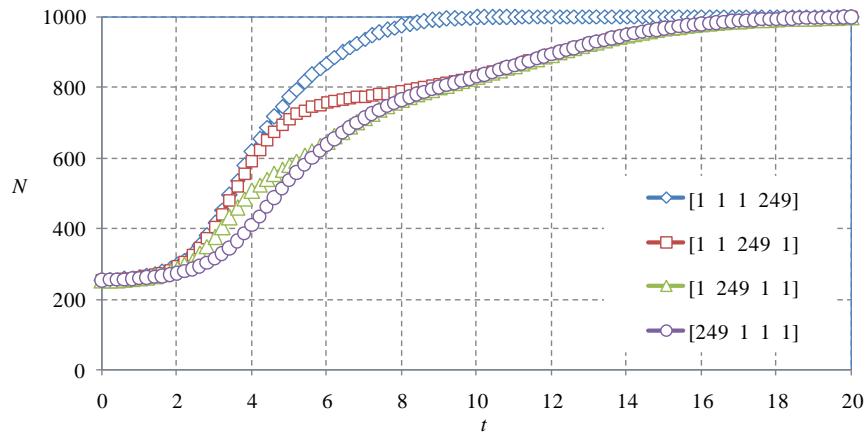
Variasi N_0

Dengan menggunakan $N_{\max} = 1000$, $\Delta t = 0.2$ jam, $\mathbf{c} = [0.25 \ 0.25 \ 0.25 \ 0.25]$, dan $\mathbf{k} = [2 \ 1.5 \ 1 \ 0.5]$ dapat diperoleh hasil yang ditunjukkan oleh Gambar 9, dengan semua populasi memiliki pertumbuhan positif dan $N_{0,i} < N_{\max,i}$.



Gambar 9. Kurva pertumbuhan dengan variasi N_0 : (a) [1 1 1 249], (b) [1 1 249 1], (c) [1 249 1 1], dan (d) [249 1 1 1].

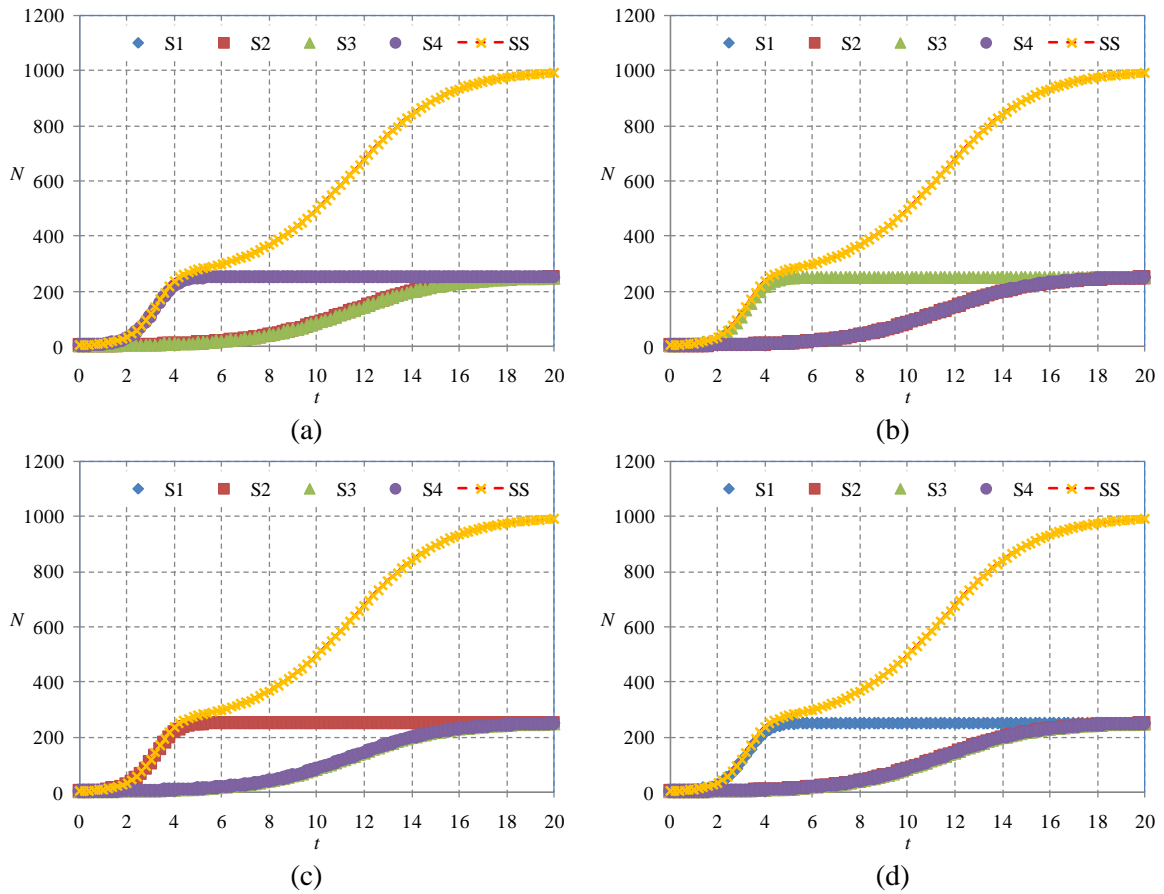
Sama dengan sebelumnya, dalam rentang pengamatan yang dilakukan, yaitu $t \in [0, 20]$, terlihat bahwa untuk waktu $t > 20$ jam kondisi saturasi telah tercapai sehingga bila dilakukan pengukuran atau sampling setelah waktu tersebut hasil yang diperoleh akan sama, akan tetapi tidak apabila dilakukan sebelumnya, yang akan memberikan hasil yang berbeda. Untuk lebih jelasnya, hal ini dapat dilihat dalam Gambar 10 berikut.



Gambar 10. Kurva pertumbuhan dengan variasi \mathbf{N}_0 : $[1 \ 1 \ 1 \ 249]$ (\diamond), $[1 \ 1 \ 249 \ 1]$ (\square), $[1 \ 249 \ 1 \ 1]$ (Δ), dan $[249 \ 1 \ 1 \ 1]$ (\circ).

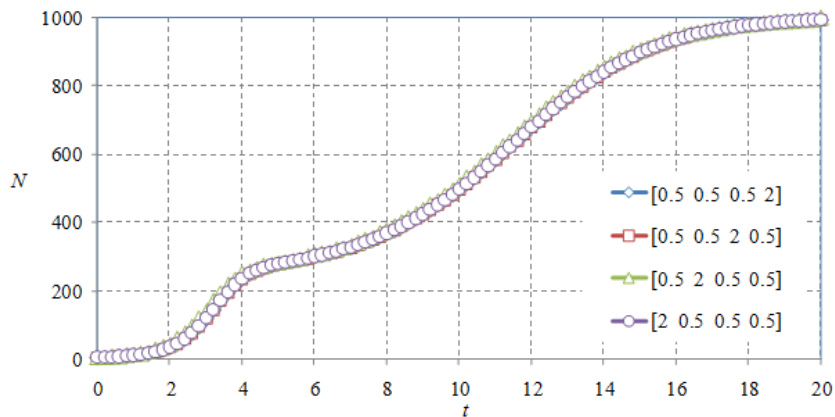
Variasi k

Dengan menggunakan $N_{\max} = 1000$, $\Delta t = 0.2$ jam, $\mathbf{c} = [0.25 \ 0.25 \ 0.25 \ 0.25]$, dan $\mathbf{N}_0 = [1 \ 1 \ 1 \ 1]$ dapat diperoleh hasil yang ditunjukkan oleh Gambar 11, dengan semua populasi memiliki pertumbuhan positif dan $N_{0,i} < N_{\max,i}$.



Gambar 11. Kurva pertumbuhan dengan variasi k : (a) $[0.5 \ 0.5 \ 0.5 \ 2]$, (b) $[0.5 \ 0.5 \ 2 \ 0.5]$, (c) $[0.5 \ 2 \ 0.5 \ 0.5]$, dan (d) $[2 \ 0.5 \ 0.5 \ 0.5]$.

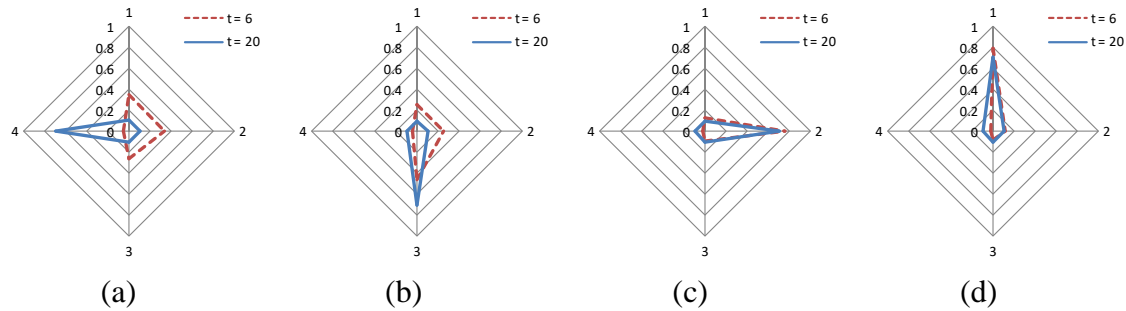
Berbeda dengan hasil-hasil sebelumnya variasi k tidak memberikan perbedaan dikarenakan hasil superposisinya tidak memberikan perbedaan populasi mana yang memiliki nilai k berbeda.



Gambar 12. Kurva pertumbuhan dengan variasi k : $[0.5 \ 0.5 \ 0.5 \ 2]$ (\diamond), $[0.5 \ 0.5 \ 0.5 \ 2]$ (\square), $[0.5 \ 2 \ 0.5 \ 0.5]$ (Δ), dan $[0.5 \ 2 \ 2 \ 2]$ (\circ).

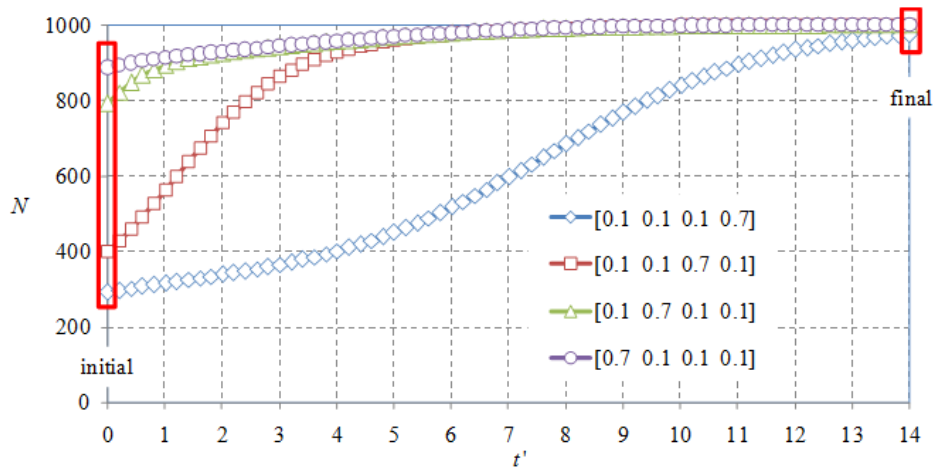
Keadaan awal berbeda

Dengan menggunakan $N_{max} = 1000$, $\Delta t = 0.2$ jam, $N_0 = [1 \ 1 \ 1 \ 1]$, dan $k = [2 \ 1.5 \ 1 \ 0.5]$ dapat diperoleh komponen komposisi populasi awal dan akhir yang ternormalisasi



Gambar 13. Komponen ternormalisasi N_0 (saat $t = 6$ jam) dan N (saat $t = 20$ jam) untuk berbagai c : (a) $[0.1 \ 0.1 \ 0.1 \ 0.7]$, (b) $[0.1 \ 0.1 \ 0.7 \ 0.1]$, (c) $[0.1 \ 0.7 \ 0.1 \ 0.1]$, dan (d) $[0.7 \ 0.1 \ 0.1 \ 0.1]$.

Komponen ke- i menggambarkan populasi jenis ke- i pada larik-larik yang digunakan. Terlihat bahwa terdapat empat komponen ternormalisasi populasi awal (saat $t = 6$ jam) yang berbeda-beda akan tetapi memberikan hasil akhir total populasi yang hampir sama. Ini menandakan bahwa jumlah total populasi akhir tidak disebabkan oleh komposisi jenis populasi awal setiap jenis yang sama. Gambar 13 konsisten dengan nilai c_i yang berbeda di mana (a) keempat, (b) ketiga, (c) kedua, dan (d) pertama, dengan $i = 1..M$ dan $M = 4$.



Gambar 14. Variasi keadaan awal (inisial) dan akhir (final) dengan variasi c bila waktu $t \rightarrow t' = t - 20$.

Representasi total populasi dari Gambar 13 telah diberikan dalam Gambar 8 yang dilukiskan kembali dalam Gambar 14 dengan sumbu mendatar

$$t' = t - 20 \tag{13}$$

yang menggambarkan bagaimana keadaan awal berbeda ($t' = 0$) menghasilkan keadaan akhir ($t' = 14$) yang sama. Tabel 1 menampilkan keadaan awal dan akhir untuk masing-masing jenis populasinya dan total populasinya

Terlihat bahwa untuk empat keadaan berbeda dengan $t \gg 20$ jam [populasi keadaan awal] pada ruas kiri akan berubah menjadi [populasi keadaan akhir] pada ruas kanan dengan (jumlah totalnya)

$$\begin{aligned}
 [100 \ 99 \ 75 \ 17](291) &\rightarrow [100 \ 100 \ 100 \ 700](1000)* \\
 [100 \ 99 \ 184 \ 15](398) &\rightarrow [100 \ 100 \ 700 \ 100](1000) \\
 [100 \ 601 \ 75 \ 15](792) &\rightarrow [100 \ 700 \ 100 \ 100](1000) \\
 [696 \ 99 \ 75 \ 15](886) &\rightarrow [700 \ 100 \ 100 \ 100](1000)
 \end{aligned}
 \tag{14}$$

dengan * merupakan hasil ekstrapolasi sesuai dengan syarat N_{max} sistem keseluruhan. Perhatikan bahwa keempat keadaan awal (291), (398), (792), (886) akan memberikan hasil akhir yang sama (1000). Hal ini menunjukkan bahwa suatu keadaan hasil sampling dapat merupakan akibat berbagai keadaan awal yang berbeda-beda, yang secara tidak langsung menjelaskan bahwa perlu dilakukan interpretasi yang lebih hati-hati saat melakukan analisa terkait dengan data hasil sampling yang diperoleh.

Tabel 1. Keadaan awal dan akhir masing-masing jenis populasi untuk variasi **c**.

Kasus	I		II		III		IV	
c	[0.1 0.1 0.1 0.7]		[0.1 0.1 0.7 0.1]		[0.1 0.7 0.1 0.1]		[0.7 0.1 0.1 0.1]	
	N	%	N	%	N	%	N	%
Inisial	100	0.343	100	0.251	100	0.126	696	0.786
	99	0.339	99	0.248	601	0.759	99	0.112
	75	0.259	184	0.463	75	0.095	75	0.085
	17	0.059	15	0.038	15	0.019	15	0.017
Final	100	0.103	100	0.100	100	0.100	700	0.700
	100	0.103	100	0.100	700	0.700	100	0.100
	100	0.103	700	0.700	100	0.100	100	0.100
	675*	0.692	100	0.100	100	0.100	100	0.100

*Nilai akan menjadi 700 untuk $t \gg 20$ jam sesuai dengan nilai **c** yang diberikan.

Ekstensi waktu dari Gambar 14 dan Tabel 1 yang diungkapkan dalam Persamaan (14) menunjukkan bahwa terdapat sejumlah keadaan awal yang dapat menghasilkan keadaan akhir yang sama. Untuk itu perlu dikembangkan suatu cara agar keadaan awal yang berbeda ini dapat dibedakan, terutama bila terdapat sedikit kekerapan sampling atau hanya beberapa waktu sampling. Karakter populasi multi-jenis dalam bentuk N_0 , **c**, dan **k** perlu diperhatikan.

Dengan melihat kembali nilai $k = [2 \ 1.5 \ 1 \ 0.5]$ terlihat bahwa jenis populasi dengan nilai k_i lebih kecil memerlukan $N_{max,i}$ lebih besar agar dalam rentang waktu pengamatan dapat mencapai jumlah total populasi yang diinginkan tanpa sebelumnya mencapai keadaan tunak. Pada kasus I $N_{0,4} = 17$ dengan $k_4 = 0.5$, pada kasus II $N_{0,3} = 184$ dengan $k_3 = 1$, pada kasus III $N_{0,2} = 601$ dengan $k_2 = 1.5$, dan pada kasus IV $N_{0,1} = 696$ dengan $k_1 = 2$ dengan masing-masing $N_{max,i} = 700$ dan lainnya adalah 100. Hal ini dapat dijelaskan karena pengambilan $t' = 0$ sebenarnya bersumber dari $t = 0$ yang telah berjalan selama 6 jam dengan kondisi awal sama $N_{0,i} = 0$ dan pembagian $N_{max,i}$ seperti dalam **c**, yang dalam tiga kasus pertama populasi jenis pertama telah jenuh dikarenakan nilai k_1 paling besar, lalu dilanjutkan dengan populasi jenis kedua dengan $k_2 = 1.5$. Hanya populasi jenis ketiga dan keempat, dengan masing-masing $k_3 = 1$ dan $k_4 = 0.5$ yang dalam waktu pengamatan belum jenuh dan masih jauh dari nilai $N_{max,3}$ dan $N_{max,4}$. Akan lebih baik apabila untuk penelitian selanjutnya tidak dilakukan dengan cara seperti

ini akan tetapi syarat awalnya memang dibuat berbeda dan ditunggu sampai menghasilkan hasil akhir yang sama.

Berdasarkan informasi-informasi tersebut, terutama apabila pertumbuhan suatu jenis populasi telah jenuh (atau hampir jenuh), untuk kasus I dapat dituliskan bahwa

$$N_I \sim f(291 - 100 - 99) = f(92) \times (k_3, k_4), \tag{15}$$

untuk kasus II

$$N_{II} \sim f(398 - 100 - 99) = f(199) \times (k_3, k_4), \tag{16}$$

untuk kasus III

$$N_{III} \sim f(792 - 100) = f(692) \times (k_2, k_3, k_4), \tag{17}$$

dan untuk kasus IV

$$N_{IV} \sim f(886 - 100) = f(786) \times (k_1, k_3, k_4). \tag{18}$$

Secara sederhana dapat diusulkan bentuk persamaan linier

$$N = f(N_{0,1}, N_{0,2}, N_{0,3}, N_{0,4}) = \sum_{i=1}^M \rho_i(k_i) (N_{0,i} - N_{\max,i}). \tag{19}$$

Dengan demikian dapat diperoleh persamaan-persamaan linier berikut

$$1000 = 25\rho_3 + 683\rho_4, \tag{20}$$

$$1000 = 516\rho_3 + 85\rho_4, \tag{21}$$

$$1000 = 199\rho_2 + 25\rho_3 + 85\rho_4, \tag{22}$$

$$1000 = 4\rho_1 + 25\rho_3 + 85\rho_4. \tag{23}$$

Persamaan (20) dan (21) akan memberikan

$$20640 = 516\rho_3 + 14097.12\rho_4$$

$$19640 = 14012.12\rho_4 \tag{24}$$

$$\rho_4 = 0.713448$$

dan

$$1000 = 516\rho_3 + 60.64308$$

$$516\rho_3 = 939.34692 \tag{25}$$

$$\rho_3 = 1.820459.$$

Substitusi Persamaan (24) dan (25) ke Persamaan (22) dan (23) akan memberikan

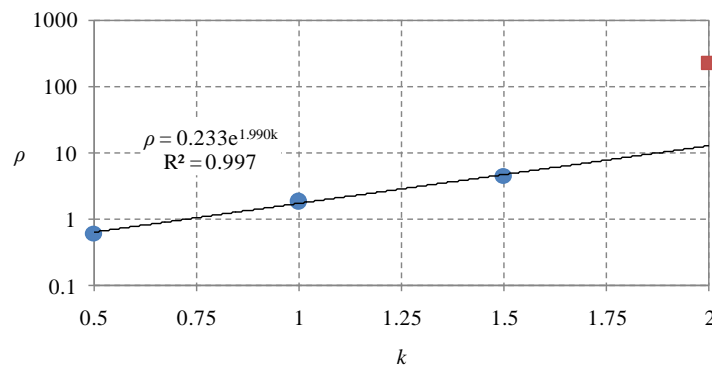
$$199\rho_2 = 1000 - 25\rho_3 - 85\rho_4 = 893.84547 \tag{26}$$

$$\rho_2 = 4.491686$$

dan

$$4\rho_1 = 1000 - 25\rho_3 - 85\rho_4 = 893.84547 \tag{27}$$

$$\rho_1 = 223.461368.$$



Gambar 15. hubungan antara ρ_i dan k_i dengan mengabaikan ρ_1 (kotak berwarna merah).

Dengan mengabaikan nilai ρ_1 yang agak terlalu jauh, dapat diperoleh Gambar 15 yang mengaitkan hubungan antara ρ dan k . Pengabaian ρ_1 dapat dijustifikasi mengingat selisih nilai 4 (700 – 694) yang terlalu kecil sehingga dalam satu langkah waktu Δt sudah jauh terlampaui. Dapat diperoleh hasil pencocokan kurva (*curve fitting*)

$$\rho = 0.233e^{1.990k}. \quad (28)$$

Bila dilanjutkan dengan mensubstitusinya ke Persamaan (19) akan memberikan

$$N = \sum_{i=2}^4 0.233e^{1.990k_i} (N_{0,i} - N_{\max,i}). \quad (29)$$

yang merupakan suatu hubungan yang diusulkan agar kaitan antara N_0 dan N dapat lebih spesifik.

KESIMPULAN

Pemodelan pertumbuhan populasi dengan jumlah jenis $M = 4$ telah berhasil dilakukan dan diperoleh bahwa variasi c dan N_0 untuk pertumbuhan positif mempengaruhi kurva pertumbuhan sedangkan variasi k tidak. Terdapat berbagai keadaan awal yang berbeda yang dapat menghasilkan keadaan akhir yang sama, sehingga perlu kehati-hatian dalam melakukan analisa data sampling pada sistem mikroorganisme dengan populasi multi-jenis. Hubungan antara N , N_0 , dan k secara empirik telah pula diusulkan untuk nilai c tertentu.

UCAPAN TERIMA KASIH

Penulis mengucapkan terima kasih kepada berbagai pihak yang telah membantu dalam penulisan makalah hasil penelitian ini dan juga presentasinya.

REFERENSI

1. Tsoularis, J. Wallace, "Analysis of logistic growth models", *Mathematical Biosciences* [Math. Biosci.], vol. 179, no. 1, pp. 21-55, Jul–Aug 2002, url [https://doi.org/10.1016/S0025-5564\(02\)00096-2](https://doi.org/10.1016/S0025-5564(02)00096-2)
2. Castillo-Chavez, W. Huang, "The logistic equation revisited: The two-sex case", *Mathematical Biosciences* [Math. Biosci.], vol. 128, nol. 1-2, pp. 299–316, Jul-Aug 1995, url [https://10.1016/0025-5564\(94\)00077-d](https://10.1016/0025-5564(94)00077-d)
3. Syamsuddin Toaha, "Analisis kestabilan model logistik satu populasi dengan tundaan waktu", *Jurnal Matematika, Statistika dan Komputasi* [JMSK], vol. 8, no. 2, pp. 131-138, Jan 2012, url <http://dx.doi.org/10.20956/jmsk.v8i2.3392>
4. P. R. Painter, A. G. Marr, "Mathematics of microbial populations", *Annual Review of Microbiology* [Ann. Rev. Microbiol.], vol. 22 no. 1, pp. 519–548, Oct 1968, url <https://doi.org/10.1146/annurev.mi.22.100168.002511>
5. J. L. Lebowitz, S. I. Rubinow, "A theory for the age and generation time distribution of a microbial population", *Journal of Mathematical Biology* [J. Math. Biol.], vol. 1, no. 1, pp. 17–36, May 1974, url <https://doi.org/10.1007/bf02339486>
6. Itzhak Fishov, Arie Zaritsky, N. B. Grover, "On microbial states of growth", *Molecular Microbiology* [Mol. Microbiol.], vol. 15, no. 5, pp. 789-794, Mar 1995, url <https://doi.org/10.1111/j.1365-2958.1995.tb02349.x>
7. Stephen Cooper, "Bacterial growth and division" in *Encyclopedia of Molecular Cell Biology and Molecular Medicine* [Ency. Mol. Cell Biol. Mol. Med.], Robert A. Meyers (Ed.), 2nd Edition, Wiley-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA, Weinheim, 2004, pp. 525-551, url <https://doi.org/10.1002/3527600906.mcb.200300079>

8. J. J. Tyson, K. B. Hannsgen, "Cell growth and division: a deterministic/probabilistic model of the cell cycle", *Journal of Mathematical Biology* [J. Math. Biol.], vol. 23, no. 2, pp. 231–246, Feb 1986, url <https://doi.org/10.1007/bf00276959>
9. M. L. Shuler, S. Leung, C. C. Dick, "A mathematical model for the growth of a single bacterial cell", *Annals of the New York Academy of Sciences* [Ann. N. Y. Acad. Sci.], vol. 326, no. 1, pp. 35-52, May 1979, url <https://doi.org/10.1111/j.1749-6632.1979.tb14150.x>
10. D Aprianti, S. N. Khotimah, S. Viridi, "Budding Yeast Colony Growth Study Based on Circular Granular Cell", *Journal of Physics: Conference Series* [J. Phys. Conf. Ser.], vol. 739, no. 1, p. 012026, 2016, url <https://doi.org/10.1088/1742-6596/739/1/012026>
11. Aprianti, F. Haryanto, A. Purqon, S. N. Khotimah, S. Viridi, "Study of Budding Yeast Colony Formation and its Characterizations by using Circular Granular Cell", *Journal of Physics: Conference Series* [J. Phys. Conf. Ser.], vol. 694, no. 1, p. 012079, 2016, url <https://doi.org/10.1088/1742-6596/694/1/012079>
12. Widodo Suwito, "Bakteri yang sering mencemari susu: deteksi, patogenesis, epidemiologi, dan cara pengendaliannya", *Jurnal Penelitian dan Pengembangan Pertanian* [JPPP], vol. 29, no. 3, pp. 96-100, Sep 2010, url <http://dx.doi.org/10.21082/jp3.v29n3.2010.p96-100>
13. Soni Prihutomo, Bhakti Etza Setiani, Dian Wahyu Harjanti, "Screening sumber cemaran bakteri pada kegiatan pemerahan susu di peternakan sapi perah rakyat Kabupaten Semarang", *Jurnal Ilmiah Ilmu Peternakan* [JIIP], vol. 25, no. 1, pp. 66-71, Apr 2015, url <http://dx.doi.org/10.21776/ub.jiip.2015.025.01.10>
14. Hermawati, S. T. Soekarto, F. R. Zakaria, S. Sudardjat, F. S. Tjatur Rasa, "Aktivitas antimikroba pada susu kuda Sumbawa", *Jurnal Teknologi dan Industri Pangan* [JTIP], vol 15, no. 1, pp. 47-53, 2004, url <https://journal.ipb.ac.id/index.php/jtip/article/view/537>
15. H. Fujikawa, S. Morozumi, "Modeling Staphylococcus aureus growth and enterotoxin production in milk", *Food Microbiology* [Food Microbiol.], vol. 23, no. 3, pp. 260–267, May 2006, url <https://doi.org/10.1016/j.fm.2005.04.005>
16. Jhony Tiago Teleken, Weber da Silva Robazza, Gilmar de Almeida Gomes, "Mathematical modeling of microbial growth in milk" *Food Science and Technology* [Food Sci. Technol. (Campinas)], vol. 31, no. 4, pp. 891-896, Oct-Dec 2011, url <https://dx.doi.org/10.1590/S0101-20612011000400010>
17. G. Fredrickson, "Behavior of mixed cultures of microorganisms", *Annual Review of Microbiology* [Ann. Rev. Microbiol.], vol. 31 no. 1, pp. 63–88, Oct 1977, url <https://doi.org/10.1146/annurev.mi.31.100177.000431>