Konsep Garis Singgung pada Kurva

Vita Deviantri[1,a)] dan Hendra Gunawan[2,b)]

[1]Program Studi Magister Pengajaran Matematika,
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Institut Teknologi Bandung,
Jl. Ganesha no. 10 Bandung, Indonesia, 40132

[2]Kelompok Keilmuan Analisis dan Geometri,
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Institut Teknologi Bandung,
Jl. Ganesha no. 10 Bandung, Indonesia, 40132

[a)] deviantoritori@gmail.com
[b)] hgunawan82@gmail.com

Abstrak

Makalah ini mengkaji sejumlah definisi garis singgung pada kurva untuk mengetahui apakah definisi tersebut telah disusun secara tepat. Definisi-definisi yang akan dikaji terlebih dahulu dikelompokkan ke dalam tiga pendekatan, yakni pendekatan geometri dasar, analisis, dan pendekatan yang lebih umum. Berdasarkan kajian definisi tersebut, makalah ini juga mengusulkan definisi baru garis singgung pada kurva, namun masih dapat dipelajari oleh siswa SMA.

Kata-kata kunci: Garis singgung, kurva, definisi

PENDAHULUAN

Garis singgung pada kurva merupakan salah satu konsep matematika yang ada di dalam kurikulum nasional. Hal ini menjadi salah satu alasan pentingnya penguasaan konsep garis singgung pada kurva oleh siswa, termasuk bagaimana menentukannya terhadap kurva yang diberikan. Agar tujuan ini tercapai, diperlukan suatu definisi garis singgung pada kurva yang memuat arti serta metode menentukannya.

Definisi garis singgung pada kurva mudah ditemukan di buku teks dan artikel-artikel. Di antara definisi-definisi yang beredar tersebut, masih terdapat kelemahan yang dapat menyebabkan pemahaman yang keliru. Sebagai contoh, terdapat definisi yang memberikan arti garis singgung pada kurva namun hanya berlaku untuk kasus tertentu, misalnya definisi garis singgung pada lingkaran. Jika diberikan sebuah garis dan sebuah lingkaran, maka dapat terjadi salah satu di antara tiga kemungkinan, yakni: (a) garis tidak melalui satupun titik pada lingkaran, (b) garis melalui sebuah titik pada lingkaran, atau (c) garis melalui lebih dari satu titik pada lingkaran. Garis yang melalui sebuah titik pada lingkaran kemudian disebut sebagai garis singgung pada lingkaran. Namun, definisi ini belum tentu berlaku untuk jenis kurva selain lingkaran. Di sisi lain, terdapat sebuah definisi yang menjelaskan metode menentukan garis singgung pada suatu kurva namun tidak memberikan arti yang cukup tentang apa yang dimaksud garis singgung pada kurva itu, misalnya definisi yang menggunakan kalkulus diferensial.

Untuk memperbaiki masalah itu, di dalam makalah ini diusulkan sebuah definisi baru garis singgung pada kurva yang lebih tepat namun masih dapat dipelajari siswa Sekolah Menengah Atas (SMA). Sebelum itu, akan dikaji terlebih dahulu definisi-definisi yang selama ini dikenal.

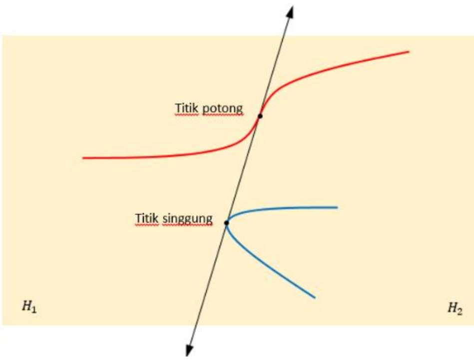
DEFINISI YANG TELAH DIKENAL

Definisi garis singgung pada kurva yang selama ini telah dikenal dapat dikelompokkan ke dalam tiga pendekatan matematis yang digunakan, yakni pendekatan geometri dasar, pendekatan analisis, dan pendekatan yang lebih umum.

Definisi menurut Pendekatan Geometri Dasar

Sumber Belajar [12] mendefinisikan sebuah garis sebagai garis singgung pada suatu kurva jika garis dan kurva tersebut memiliki tepat sebuah titik persekutuan, yang kemudian disebut titik singgung. Akan diperiksa apakah definisi ini dirumuskan dengan tepat. Terlebih dahulu ingat kembali postulat separasi bidang di Elemen Euclid. Misal terdapat sebuah garis (namakan garis l) membagi sebuah bidang menjadi dua setengah bidang (H_1 dan H_2). Jika diberikan sebuah kurva di bidang sehingga garis l dan kurva memiliki sebuah titik persekutuan, maka kemungkinannya:

1. Kurva berada di H_1 dan H_2 (garis disebut memotong kurva); atau
2. Kurva berada di salah satu antara H_1 dan H_2 (lihat Gambar 1).

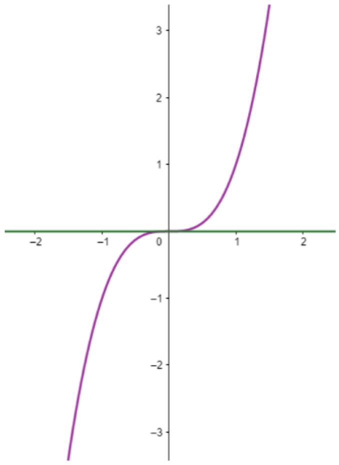


Gambar 1. Ilustrasi postulat separasi bidang

Berdasarkan postulat di atas, jika garis dan kurva memiliki sebuah titik persekutuan maka tidak menjamin garis tersebut dikatakan garis singgung, karena titik persekutuan dapat juga berarti titik potong. Dengan demikian, penggunaan istilah ‘titik persekutuan’ dan ‘titik singgung’ pada definisi menurut Sumber Belajar membingungkan sehingga definisi tersebut dapat dikatakan kurang tepat.

Definisi lain terdapat pada situs Brilliant [4]. Garis singgung pada kurva didefinisikan sebagai garis yang menyentuh kurva di suatu titik namun tidak memotong kurva itu. Definisi tersebut masih terbatas untuk beberapa kasus saja mengingat garis singgung kurva fungsi $y = x^3$ di titik pusat adalah garis horizontal $y = 0$ yang tampak memotong kurva (lihat Gambar 2).

ISBN 978-602-61045-7-1



Gambar 2. Kurva fungsi $y = x^3$ dan garis singgung di titik pusat

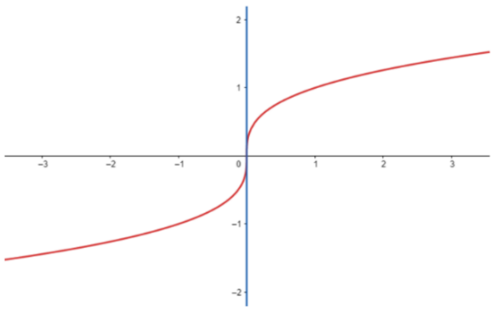
Definisi menurut Pendekatan Analisis

Definisi garis singgung pada kurva yang menggunakan kalkulus diferensial terdapat pada [1], [2], [5], [9], [10], [11], dan [13]. Dikatakan bahwa garis singgung pada kurva $y = f(x)$ di titik $P(c, f(c))$ adalah garis yang melalui P dan memiliki kemiringan

$$m = f'(c) = \lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

dengan syarat limit tersebut ada.

Definisi tersebut mengasumsikan fungsi f memiliki turunan di titik yang diberikan dan menjelaskan metode menentukan garis singgung suatu kurva dengan cara menghitung kemiringan garis. Namun, definisi ini masih menyisakan kasus saat garis singgung kurva berupa garis vertikal, contohnya garis singgung kurva $y = \sqrt[3]{x}$ di titik pusat adalah garis $x = 0$ (lihat Gambar 3).



Gambar 3. Kurva fungsi $y = \sqrt[3]{x}$ dan garis singgung di titik pusat

Walaupun terdapat definisi lain untuk kasus kasus garis singgung vertikal (lihat [7] dan [8]), definisi-definisi ini kurang menjelaskan apa yang dimaksud garis singgung pada kurva.

Definisi menurut pendekatan analisis yang dirumuskan secara lebih baik mengatakan bahwa garis singgung pada suatu kurva adalah hampiran linier terbaik di sekitar titik yang diberikan

ISBN 978-602-61045-7-1

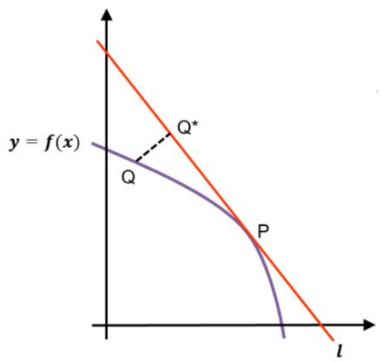
pada kurva [3]. Secara lebih jelas, garis $y = L(x)$ adalah garis singgung kurva $y = F(x)$ di titik $P(a, f(a))$ pada kurva jika untuk setiap garis lain $y = K(x)$ yang melewati P terdapat $\delta > 0$ sehingga

$$|f(x) - L(x)| \leq |f(x) - K(x)| \text{ untuk setiap } a - \delta < x < a + \delta.$$

Definisi tersebut memberikan arti garis singgung pada kurva . Dapat diperiksa jika $y = f(x)$ memiliki turunan di $x = a$ maka garis $y = f(a) + f'(a)(x - a)$ adalah garis singgung kurva $y = f(x)$ di titik $P(a, f(a))$. Terlepas dari definisi ini masih mengecualikan kasus garis singgung vertikal, definisi ini masih terlalu sulit untuk dipelajari siswa SMA terutama dalam membuktikan ketidaksamaan di atas.

Definisi menurut Pendekatan yang Lebih Umum

Definisi garis singgung pada kurva yang menggunakan gagasan hampiran linier terbaik dan berlaku untuk kasus garis singgung vertikal dikemukakan oleh Gunawan [6] dengan konsep jarak titik ke garis.



Gambar 4. Kurva fungsi $y = \sqrt[3]{x}$ dan garis singgung di titik pusat

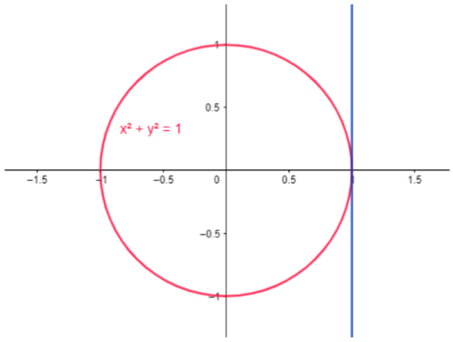
Gambar 4 di atas mengilustrasikan sebuah garis l yang melalui kurva $y = f(x)$ di titik P. Kemudian, diambil sebarang titik Q pada kurva yang dekat dengan titik P sehingga proyeksinya di garis l adalah $Q*$. Garis l adalah garis singgung kurva $y = f(x)$ di titik P jika jarak antara Q dan $Q*$ menuju 0 lebih cepat daripada jarak antara P dan $Q*$, yakni

$$\lim_{Q \to P} \frac{d(Q, Q*)}{d(P, Q*)} = 0.$$

Lihat Contoh 1 sebagai contoh penggunan definisi tersebut pada soal.

Contoh 1:

Buktikan bahwa garis singgung kurva $x^2 + y^2 = 1$ di titik $(1, 0)$ adalah garis $x = 1$.



Gambar 5. Kurva fungsi $x^2 + y^2 = 1$ dan garis singgung di titik $(1,0)$

Bukti:

Definisikan titik $P(x, \sqrt{1-x^2})$ pada kurva yang dekat dengan titik $P(1,0)$ sehingga proyeksi Q pada garis $x = 1$ adalah $Q*(1, y)$. Sesuai definisi, akan ditunjukan $\lim_{Q\to P} \frac{d(Q,Q*)}{d(P,Q*)} = 0$. Dapat dihitung

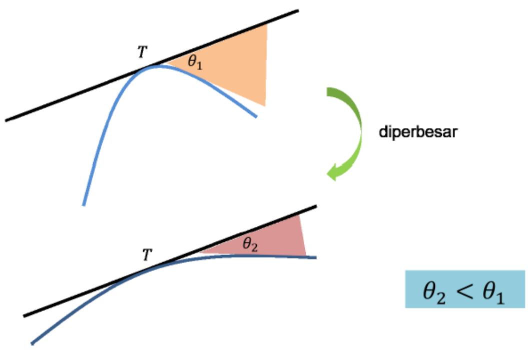
$$\lim_{Q\to P} \frac{d(Q,Q*)}{d(P,Q*)} = \lim_{Q\to P} \frac{\sqrt{(1-x)^2+(y-y)^2}}{\sqrt{(1-1)^2+(y-0)^2}} = \lim_{x\to 1^-} \frac{1-x}{y^2} = \lim_{x\to 1^-} \frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{x\to 1^-} \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}} = 0.$$

Dapat disimpulkan bahwa garis $x = 1$ adalah garis singgung kurva $x^2 + y^2 = 1$ di titik $(1, 0)$.

Contoh 1 memperlihatkan bahwa definisi menurut Gunawan berlaku untuk garis singgung vertikal dan memberikan arti garis singgung pada kurva sebagai hampiran linier terbaik kurva di sekitar titik yang diberikan. Sayangnya definisi ini pun masih sulit dipelajari siswa SMA karena keterbatasan materi prasyarat yang dimiliki siswa.

USULAN DEFINISI BARU

Definisi garis singgung pada kurva yang diusulkan menggunakan konsep sudut antara garis dan kurva. Pertama-tama, andai diberikan sebuah kurva dan garis singgung di titik T. Bayangkan bahwa kita akan menyisipkan sebuah benda bersudut (misal jarum atau benda berbentuk segitiga) di antara kurva dan garis singgung itu, dengan tujuan ujung benda tersebut menyentuh titik T (lihat Gambar 6).



Gambar 6. Ilustrasi konstruksi definsi baru

Harus seberapa tajam atau seberapa kecilkah ukuran sudut jarum tersebut? Seberapapun kecilnya ukuran sudut jarum, ia tidak akan pernah menyentuh titik singgung. Namun, kita dapat mengetahui bahwa semakin kecil ukuran sudut jarum, semakin dekat pula ujung jarum tersebut terhadap titik singgung. Andai kita memiliki jarum yang ukuran sudutnya nol, kita dapat menyisipkan jarum itu di antara kurva dan garis singgung sehingga ia menyentuh titik singgung. Jika terdapat garis lain yang bukan merupakan garis singgung melalui suatu titik pada kurva, kita dapat menyisipkan jarum dengan ukuran sudut positif dengan mudah di antara kurva dan garis tersebut sehingga ia pasti menyentuh titik singgung.

Untuk mengkonstruksi definisi baru, pertama-tama ingat kembali teorema sudut antara dua vektor taknol. Jika $\boldsymbol{u}$ dan $\boldsymbol{v}$ adalah vektor taknol, maka

$$\cos\theta = \frac{\boldsymbol{u}\bullet\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}|}.$$

Sekarang kita akan mengkonstruksi definisi baru. Diberikan kurva $y = f(x)$ dan garis l melalui kurva di titik P. Ambil sebarang titik Q pada kurva yang dekat dengan titik P dan titik R pada garis l. Garis l adalah garis singgung kurva $y = f(x)$ di titik P jika

$$\lim_{Q\to P}\frac{\overrightarrow{PQ}\bullet\overrightarrow{PR}}{|\overrightarrow{PQ}|\,|\overrightarrow{PR}|} = \pm 1.$$

Jika θ didefinisikan sebagai sudut antara kurva dan garis singgung di titik singgung, maka kondisi tersebut setara dengan $\theta = 0$. Dapat dilihat di bawah ini contoh-contoh penggunaan definisi pada soal-soal.

Contoh 2:

Sama dengan Contoh 1, buktikan bahwa garis singgung kurva $x^2 + y^2 = 1$ di titik $(1,0)$ adalah garis $x = 1$.

Bukti:

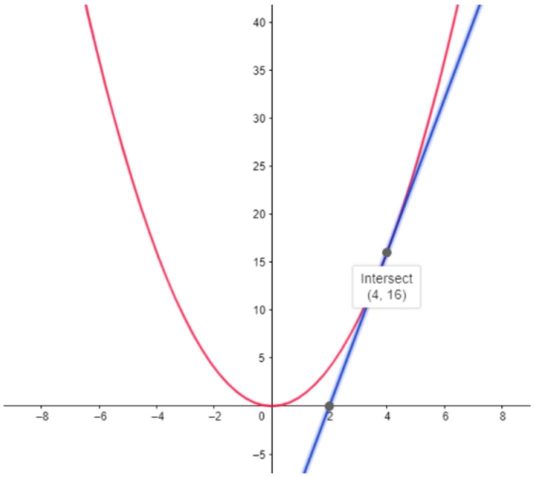
Misal $Q(x,y)$ titik pada kurva $x^2 + y^2 = 1$ yang dekat dengan titik $P(1{,}0)$. Asumsikan $y \neq 0$ dan ambil sebarang titik $R(1,y)$ pada garis $x = 1$ dengan R tidak sama dengan P sehingga dapat didefinisikan vektor $\overrightarrow{PQ} = (x-1,y)$ dan $\overrightarrow{PR} = (0,y)$. Menggunakan definisi baru, hitung

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{(x-1,y)\bullet(0,y)}{|(x-1,y)|\,|(0,y)|} = \lim_{x\to 1^-}\frac{y^2}{\sqrt{(x-1)^2+y^2}\,\sqrt{y^2}} = \lim_{x\to 1^-}\frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{2}} = 1.$$

Dengan demikian, garis $x = 1$ adalah garis singgung kurva $x^2 + y^2 = 1$ di titik $(1,0)$.

Contoh 3:

Tentukan garis singgung kurva $y = f(x) = x^2$ di titik (4,16).



Gambar 7. Kurva $y = f(x) = x^2$ dan garis singgung di titik (4,16)

Jawab:

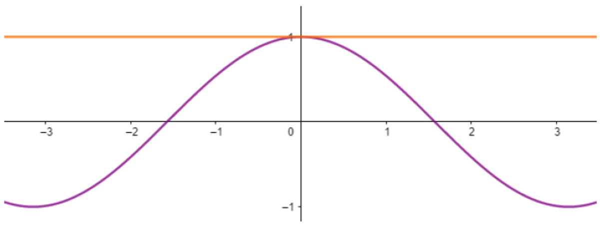
Ketika kita menentukan garis singgung pada kurva menggunakan kalkulus diferensial, dapat diperoleh kemiringannya $m = D_4(x^2) = 2(4) = 8$ sehingga persamaan garis singgungnya adalah $y = 8x - 16$. Dengan menggunakan definisi baru, pertama-tama dimisalkan k sebagai kemiringan garis singung (dengan mengetahui garis singgung bukanlah garis vertikal). Akan ditentukan nilai k. Ambil titik $R(4+1, 16+k)$ pada kurva sehingga $\overrightarrow{PR} = (1, k)$ dan titik $Q(x, x^2)$ sehingga $\overrightarrow{PQ} = (x-4, x^2-16)$. Hitung

$$\lim_{x\to 4} \frac{(x-4, x^2-16)\bullet(1,k)}{|(x-4, x^2-16)|\,|(1,k)|} = \lim_{x\to 4} \frac{(x-4)+k(x^2-16)}{\sqrt{(x-4)^2+(x^2-16)^2}\sqrt{1+k^2}} = \lim_{x\to 4} \frac{sgn(x-4)+(1+k(x+4))}{\sqrt{1+(x+4)^2}\sqrt{1+k^2}} = \pm\frac{1+8k}{\sqrt{65}\sqrt{1+k^2}}.$$

Tanda $\pm$ melambangkan nilai limit dari kanan dan kiri $x = 4$. Nilai limit akan sama dengan ± 1 jika dan hanya jika $\frac{1+8k}{\sqrt{65}\sqrt{1+k^2}} = 1$ atau $1 + 8k = \sqrt{65}\sqrt{1+k^2}$. Dengan menentukan solusi persamaan tersebut, nilai limit akan sama dengan ± 1 jika dan hanya jika $k = 8$. Dengan demikian, kemiringan garis singgung kurva $= f(x) = x^2$ di titik (4,16) adalah 8, sehingga persamaan garis singgungnya adalah $y = 8x - 16$.

Contoh 4:

Buktikan bahwa garis singgung kurva $y = f(x) = \cos x$ di titik $(0,1)$ adalah garis horizontal.



Gambar 7. Kurva $y = f(x) = \cos x$ dan garis singgung di titik (0,1)

ISBN 978-602-61045-7-1

Bukti:

Misal $Q(x, \cos x)$ sebarang titik pada kurva yang dekat dengan titik $P(0,1)$. Misal l adalah garis yang melalui P dengan kemiringan k dan $R(1,1+k)$ adalah titik pada garis l yang berbeda dengan P. Hitung

$$\lim_{x\to 0}\frac{(x,\cos x-1)\bullet(1,k)}{|(x,\cos x-1)|\,|(1,k)|}=\lim_{x\to 0}\frac{x+k(\cos x-1)}{\sqrt{x^2+(\cos x-1)^2}\,\sqrt{1+k^2}}=\lim_{x\to 0}\frac{x+k(\cos x-1)}{|x|\sqrt{1+\left(\frac{1-\cos x}{x}\right)^2}\,\sqrt{1+k^2}}=\pm\frac{1}{\sqrt{1+k^2}}.$$

Agar garis l menjadi garis singgung, maka haruslah $\frac{1}{\sqrt{1+k^2}}=1$ sehingga haruslah $\sqrt{1+k^2}=1$. Dengan demikian, diperoleh $k=0$ sehingga garis singgung kurva $y=f(x)=\cos x$ di titik $(0,1)$ adalah garis horizontal $y=1$.

KESIMPULAN

Banyak definisi garis singgung pada kurva yang dapat kita temui walaupun ada definisi yang dirumuskan secara kurang tepat dan tidak berlaku untuk semua kasus. Definisi baru yang telah diusulkan memberikan perumusan garis singgung pada kurva yang berlaku untuk semua kasus termasuk bagaimana cara menentukannya, tanpa meninggalkan gagasan bahwa garis singgung kurva merupakan hampiran linier terbaik kurva di sekitar titik yang diberikan.

Definisi baru tersebut dapat diajarkan kepada siswa SMA dengan syarat siswa telah menguasai konsep sudut antara dua verktor dan bagaimana menghitung limit. Sebelumnya, guru dapat terlebih dahulu mengajarkan materi vektor kemudian materi limit (bagaimana menghitung limit untuk beragam fungsi).

REFERENSI

1. Ari, Y. R., Indriyastuti, *Khazanah Matematika 2 untuk Kelas XI SMA dan MA Program Ilmu Pengetahuan Sosial*. Pusat Perbukuan Departemen Pendidikan Nasional (2009)
2. Barnett, R.A., Ziegler, M. R., *Applied Calculus for Business and Economics, Life Sciences, and Social Sciences*. Dellen Publishing Company (1982)
3. Bivens, C., *What a Tangent Line is When it isn't a Limit*. https://www.maa.org/sites/default/files/pdf/upload_library/22/Polya/07468342.di020721.02p01112.pdf
4. Ellinor, A., Khim, J., *Tangent to a Curve*. https://brilliant.org/wiki/tangent-to-acurve/
5. Goldstein, Lay, Schneider, *Calculus and Its Applications, 7th Edition*. Prentice Hall, Inc. (1977)
6. Gunawan, H., *Garis Singgung pada Kurva - II*. https://bermatematika.net/2018/03/03/garis-singgung-pada-kurva-ii/ (2018)
7. Larson, R., Edwards, B. H., *Calculus, Ninth Edition*. Brooks/ Cole Cengage Learning (2010)
8. Leithold, L., *The Calculus with Analytic Geometry, Third Edition*. Harper and Row Publisher (1976)
9. Rogawski, *Calculus Single Variable, Second Edition*. W.H. Freeman Company (2012)
10. Sangaku Maths, *Tangent Straight Line to a Curve at a Point*. https://www.sangakoo.com/en/unit/tangent-straight-line-to-a-curve-at-a-point
11. Soedyarto, N., Maryanto, *Matematika Jilid 2 untuk SMA dan MA Kelas XI Program IPA*. Pusat Perbukuan Departemen Pendidikan Nasional (2008)
12. Sumber Belajar, *Pengertian Garis Singgung dan Garis Normal*. https://sumberbelajar.belajar.kemdikbud.go.id/sumberbelajar/tampil/Garis-Singgung- dan-Garis-Normal-2016/menu3.html (2016)

13. Sutrisma, Usodo, M., *Wahana Matematika untuk SMA/ MA Kelas XI Program Ilmu Pengetahuan ALam*. Pusat Perbukuan Departemen Pendidikan Nasional (2009)