

# Analisis Numerik dari Presesi Orbit Merkurius Menggunakan *Curve-Fitting* Berbasis Deret Fourier

Muhammad Baharuddin Rusyda<sup>1,a)</sup>, Agus Suroso<sup>1,b)</sup>, dan Wahyu Hidayat<sup>1,c)</sup>

<sup>1</sup>Laboratorium Fisika Teoretik,  
Kelompok Keilmuan Fisika Teoretik Energi Tinggi dan Instrumentasi,  
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Institut Teknologi Bandung,  
Jl. Ganesha no. 10 Bandung, Indonesia, 40132

<sup>a)</sup> rusyda@students.itb.ac.id (corresponding author)

<sup>b)</sup> agussuroso@fi.itb.ac.id

<sup>c)</sup> wahid@fi.itb.ac.id

## Abstrak

*Teori relativitas Einstein memprediksi adanya koreksi potensial yang sebanding dengan  $1/r^3$  terhadap potensial gravitasi Newtonian untuk gerak orbit. Penambahan koreksi ini mengakibatkan terbentknya orbit yang tidak tertutup terutama ketika radius orbit tidak terlalu besar dibandingkan dengan radius Schwarzschild sumber. Pergeseran (presesi) orbit ini telah diamati pada Merkurius dan sesuai dengan prediksi yakni sekitar  $44''$  per abad. meski begitu, enambahan koreksi relativistik ini mengakibatkan persamaan differensial orbit yang tidak dapat diselesaikan secara analitik, sehingga metode perturbasi diperlukan. Metode perturbasi sebagai metode aproksimasi akan memberikan simpangan dari nilai yang seharusnya. Pada penelitian ini digunakan metode numerik untuk menyimulasikan dinamika orbit akibat koreksi relativistik dan dicoba perhitungan parameter orbit dengan ketelitian yang lebih tinggi dari metode perturbasi simulasi telah dilakukan dan perbandingan terhadap dinamika orbit Newtonian menunjukkan bahwa tingkat akurasi yang diperlukan telah tercapai. Analisis data relativistik menggunakan ekspansi Fourier memberikan nilai presesi sebesar  $42.9768''$  per abad, berbeda sekitar  $0.003''$  dibandingkan hasil perhitungan termutakhir oleh Park dkk. pada ref 4.*

*Kata-kata kunci: Dinamika orbit, Metode Numerik, Presesi Merkurius, Teori relativitas Einstein*

## PENDAHULUAN

Persamaan Einstein adalah sebuah sistem persamaan diferensial parsial non-linear. Persamaan diferensial non-linear sangat sulit untuk diselesaikan secara analitik, oleh karena itu dalam Fisika sering kali digunakan metode perturbasi dari solusi yang telah diketahui dari linearisasi persamaan diferensial yang bersangkutan. Metode perturbasi, sebagai aproksimasi, memiliki simpangan (error) dari nilai sebenarnya yang akan semakin besar seiring dengan semakin jauhnya dari kondisi dari linearisasi sebelumnya.

Pada penelitian ini, akan dilakukan pemecahan persamaan orbit Merkurius dengan koreksi GR menggunakan metode numerik dengan bantuan program MATLAB.

## TINJAUAN PUSTAKA

### Sistem Matahari-Merkurius

Sistem Matahari-Merkurius mengacu kepada sebuah sistem yang terbentuk akibat interaksi gravitasi dari Matahari dan Merkurius. Parameter-parameter penting yang digunakan dalam pembahasan sistem Matahari-Merkurius, baik dari pandangan klasik maupun relativistik, dapat dilihat pada tabel 1.

Tabel 1. Parameter sistem Matahari-Merkurius (dalam satuan SI kecuali dinyatakan lain)

Laju cahaya dalam vakum, $c$	2,99792458E+08[1]
Parameter gravitasi standard Matahari, $GM_s$	1,32712440E+20[2]
Parameter gravitasi standard Merkurius, $GM_{Merc}$	2,2032E+13[3]
Sumbu semi-major Merkurius, $a$	5,7909050E+10[3]
Eksentrisitas Merkurius, $e$	2,05360E-01[3]
Periode revolusi Merkurius, $T$	0,240846 tahun[3]

Perincian kontribusi presesi Merkurius berdasarkan perhitungan termutakhir dapat dilihat pada Tabel 2.

Tabel 2. Perincian kontribusi terhadap presesi[4]

Penyebab	Besar (detik busur per abad)
Efek gravitasi benda lain	532,3035
Koreksi relativistik	42,9779
Teramati	574,10±0,65

### Persamaan orbit

#### Persamaan orbit Newtonian

Persamaan orbit Newtonian didapatkan dengan menggunakan konservasi energi dan momentum sudut pada kasus gaya sentral[5]. Persamaan konservasi energi partikel (per satuan massa partikel) dalam koordinat polar, dengan notasi dot menyatakan turunan terhadap waktu ( $\dot{r} = dr/dt$ ),

$$\frac{1}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2) + \varphi(r) = \varepsilon, \quad (1)$$

dimana  $r$  dan  $\phi$  masing-masing menyatakan koordinat radial dan azimuthal,  $\varphi$  menyatakan potensial sistem, dan  $\varepsilon$  energi spesifik sistem. Persamaan konservasi momentum sudut berbentuk

$$r^2\dot{\phi} = h, \quad (2)$$

dimana  $h$  adalah momentum sudut spesifik.

Pada gravitasi Newtonian potensial gravitasi  $\varphi(r)$  memiliki bentuk  $\varphi(r) = -G_N \frac{M_s}{r} = -\frac{GM_s}{r}$ .

Persamaan konservasi energi dapat ditulis kembali menggunakan besaran potensial efektif,

$$\varphi_{eff}^N(r) = -\frac{GM_s}{r} + \frac{h^2}{2r^2}, \quad (3)$$

$$\frac{1}{2}\dot{r}^2 + \varphi_{eff}^N = \varepsilon, \quad (4)$$

dimana  $GM_s$  adalah parameter gravitasi sumber,  $G_N$  konstanta gravitasi Newton,  $M_s$  massa sumber, dan  $\varphi_{eff}^N$  potensial efektif Newtonian.

Menggabungkan persamaan (1) dan (2) untuk menghilangkan ketergantungan eksplisit terhadap waktu dan menggunakan substitusi  $u = 1/r$  didapatkan persamaan orbit Newtonian, dimana notasi prime menunjukkan turunan terhadap  $\phi$  ( $u' = du/d\phi$ ),

$$u'^2 - \frac{2}{\alpha} u + u^2 = \frac{2}{\alpha GM_S}, \quad (5)$$

atau dengan menurunkan sekali lagi terhadap didapat

$$u'' + u - \frac{1}{\alpha} = 0. \quad (6)$$

### Teori relativitas Einstein

Persamaan dinamika dalam relativitas umum dijelaskan oleh persamaan medan Einstein dan persamaan geodesik yang dapat ditulis, dimana notasi dot menyatakan turunan terhadap waktu proper ( $\dot{r} = dr/d\tau$ ),

$$G_{\mu\nu} = -\frac{8\pi G_N}{c^4} T_{\mu\nu}, \quad (7)$$

$$\frac{d}{d\sigma} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu} - \frac{\partial L}{\partial x^\mu} = 0, \quad (8)$$

$$L = g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu, \quad (9)$$

dimana  $G_{\mu\nu}$  menyatakan tensor Einstein,  $T_{\mu\nu}$  tensor energi-momentum,  $\sigma$  parameter kurva,  $L$  lagrangian, dan  $g_{\mu\nu}$  metrik [6].

Pada pembahasan kali ini akan digunakan beberapa penyederhanaan, yaitu

11. Parameter gravitasional standar Merkurius yang jauh lebih kecil dari Matahari, sehingga kontribusi Merkurius terhadap tensor energi-momentum dapat diabaikan.
12. Efek dari rotasi Matahari, biasa disebut efek Lense-Thirring, memiliki orde  $\approx 10^{-3}$  per abad, sehingga dapat diabaikan [7].
13. Matahari netral secara elektrik

Solusi medan Einstein untuk kasus sumber simetris sferik, vakum, tidak berotasi, dan tidak bermuatan disebut solusi Schwarzschild, atas nama Karl Schwarzschild yang menemukannya pada 1916. Solusi Schwarzschild dalam koordinat polar, dengan signature  $(-, +, +, +)$ , memiliki bentuk

$$g = \text{diag} \left( -\left(1 - \frac{r^*}{r}\right), \left(1 - \frac{r^*}{r}\right)^{-1}, r^2, r^2 \sin^2 \theta \right) [6], \quad (10)$$

dimana  $r^*$ , disebut radius Schwarzschild, bernilai  $\frac{2GM_S}{c^2}$  dan untuk sistem Matahari-Merkurius memiliki orde  $\approx 10^3$  m. Solusi Schwarzschild ini beranalogi dengan medan gravitasi akibat sumber sferis pada teori gravitasi klasik Newtonian.

### Persamaan orbit relativistik

Persamaan orbit dalam relativitas umum didapatkan dengan menyubstitusi metrik Schwarzschild ke dalam persamaan geodesik dan mengambil bidang orbit pada  $\theta = \pi/2$ , sehingga didapat

$$L = -\frac{1}{g_{rr}} c^2 \dot{t}^2 + g_{rr} \dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2. \quad (11)$$

Menyubstitusi persamaan (11) ke persamaan (8) memberikan

$$\frac{d}{d\sigma} \frac{\partial L}{\partial \dot{t}} = 0, \quad (12)$$

$$\frac{d}{d\sigma} \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = 0, \quad (13)$$

sehingga terdapat 2 persamaan konservasi dalam gerak. Mengambil

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{t}} = -2c^2 \eta, \quad (14)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = 2h, \quad (15)$$

$L$  dapat ditulis

$$L = g_{rr} \left( -c^2 \eta^2 + \dot{r}^2 + \frac{1}{g_{rr}} \frac{h^2}{r^2} \right). \quad (16)$$

Untuk partikel masif waktu proper  $\tau$  dapat digunakan sebagai parameter kurva dan mengingat  $ds^2 = -c^2 d\tau^2$ , maka

$$L = \left( \frac{ds}{d\tau} \right)^2 = -c^2. \quad (17)$$

menyubsitutsi persamaan (16) dan (17) memberikan

$$\frac{1}{2} \dot{r}^2 - \frac{GM_s}{r} + \frac{h^2}{2r^2} - \frac{h^2 r^*}{2r^3} = \frac{\eta^2 - 1}{2} c^2. \quad (18)$$

Membandingkan persamaan (1) dan (18), dapat disimpulkan bahwa  $\varepsilon$  terkait dengan  $\eta$  dengan persamaan  $(\eta^2 - 1)/2 = \varepsilon/c^2$ . Terlihat juga terdapat koreksi pada potensial efektif yang berbentuk

$$\varphi_{eff}^E = -\frac{GM_s}{r} + \frac{h^2}{2r^2} - \frac{h^2 r^*}{2r^3} = \varphi_{eff}^N - \frac{h^2 r^*}{2r^3}. \quad (19)$$

dimana  $\varphi_{eff}^E$  merupakan potensial energi relativistik.

Persamaan orbit dicari kembali dengan substitusi persamaan (15) ke persamaan (18) dan mengambil  $u = 1/r$ , didapat, dimana notasi prime merupakanturunan terhadap  $\phi$ ,

$$u'^2 - \frac{2}{\alpha} u + u^2 - r^* u^3 = \frac{2\varepsilon}{\alpha GM_s}. \quad (20)$$

yang dapat diturunkan sekali lagi terhadap  $\phi$  untuk memberikan

$$u'' + u - \frac{1}{\alpha} - \lambda \alpha u^2 = 0. \quad (21)$$

dimana didefinisikan  $\lambda = 3r^*/2\alpha$ .

Membandingkan persamaan orbit relativistik (21) dengan persamaan orbit Newtonian (6), terlihat bahwa koreksi relativistik berada pada tambahan suku  $\lambda \alpha u^2$ , dimana untuk sistem Matahari-Merkurius memiliki orde  $10^{-7}$ .

## Solusi Persamaan Orbit

### Solusi Analitik Persamaan Orbit Newtonian

Solusi umum persamaan (6) memiliki bentuk

$$u = \frac{1}{\alpha} + A \cos(\phi - \beta), \quad (22)$$

dimana  $A$  dan  $\beta$  merupakan konstanta integrasi. Dengan mengambil koordinat dimana  $\beta = 0$ , maka

$$u(\phi) = \frac{1}{\alpha} + A \cos \phi, \quad (23)$$

$$r(\phi) = \frac{\alpha}{1 + e \cos \phi}, \quad (24)$$

dimana  $e = \alpha A$  adalah eksentrisitas orbit. Nilai  $e$  dapat dihitung dengan menyubstitusi persamaan (24) ke persamaan (1) dan didapatkan

$$e = \sqrt{1 + \frac{2\mathcal{E}h^2}{GM_s^2}}, \quad (25)$$

### Solusi Perturbasi Persamaan Orbit Relativistik

Solusi perturbasi persamaan (21) didapatkan dengan mengambil solusi berbentuk  $u = u_0 + \lambda u_1$  dimana  $u_0$  memenuhi persamaan (6) dan  $u_1$  merupakan suku koreksi. Menyubstitusikan solusi perturbasi ke persamaan (21) memberikan

$$\left( u_0'' - \frac{1}{\alpha} + u_0 \right) + \lambda (u_1'' + u_1 - \alpha u_0^2) + O(\lambda^2) = 0. \quad (26)$$

Mengabaikan suku berorde tinggi dan mengingat suku pertama bernilai nol, persamaan yang perlu diselesaikan berbentuk

$$u_1'' + u_1 - \alpha u_0^2 = 0, \quad (27)$$

$$u_1'' + u_1 = \frac{1}{\alpha} \left( 1 - \frac{e^2}{2} \right) + 2 \frac{e}{\alpha} \cos \phi + \frac{e^2}{2\alpha} \cos 2\phi. \quad (28)$$

Mengambil solusi khusus berbentuk  $u_1 = A + B\phi \sin \phi + C \cos 2\phi$  didapatkan [8], [9]

$$u_1 = \frac{1}{\alpha} \left( \left( 1 - \frac{e^2}{2} \right) + e\phi \sin \phi - \frac{e^2}{6} \cos 2\phi \right). \quad (29)$$

Suku pertama merepresentasikan koreksi kecil yang tak teramati terhadap jarak. Suku ketiga memiliki periode yang sama dengan suku orde nol, sehingga dapat diabaikan. Suku kedua merupakan suku yang perlu diperhatikan khusus karena selalu meningkat dengan  $\phi$  (modulo  $2\pi$ ). Memasukkan suku ini sebagai solusi perturbasi memberikan

$$r(\phi) = \frac{\alpha}{1 + e \cos \phi + e\lambda \phi \sin \phi}, \quad (30)$$

$$r(\phi) \approx \frac{\alpha}{1 + e \cos[(1 - \lambda)\phi]}, \quad (31)$$

dimana digunakan aproksimasi untuk nilai  $\lambda$  yang kecil. Terlihat bahwa partikel tidak kembali ke perihelion pada  $\phi = 2\pi$  tetapi pada  $\phi = 2\pi/(1 - \lambda) \approx 2\pi + 3\pi r^*/\alpha$ , dengan kata lain perihelion bergeser per revolusi sebesar

$$\delta\phi = \frac{3\pi r^*}{\alpha}. \quad (32)$$

Dengan menyubstitusikan nilai untuk sistem Matahari-Merkurius, didapatkan nilai

$$\delta\phi = 5.0187 \times 10^{-7} \text{ radian per revolusi} = 42.807'' \text{ per abad}. \quad (33)$$

## HASIL SIMULASI

### Metode

Metode yang digunakan pada simulasi ini yaitu metode Runge-Kutta (RK) orde-6 tanpa secara eksplisit mengandung turunan pertama yang dikembangkan oleh Collatz [10] dan Scraton [11]. Formulasi berbentuk

$$k_0 = f(u_i) d\phi^2, \quad (34)$$

$$k_1 = f \left( u_i + \frac{1}{4} v_i d\phi + \frac{1}{32} k_0 \right) d\phi^2, \quad (35)$$

$$k_2 = f \left( u_i + \frac{1}{2} v_i d\phi - \frac{1}{24} k_0 + \frac{1}{6} k_1 \right) d\phi^2, \quad (36)$$

$$k_3 = f\left(u_i + \frac{3}{4}v_i d\phi + \frac{3}{32}k_0 + \frac{1}{8}k_1 + \frac{1}{16}k_2\right)d\phi^2, \quad (37)$$

$$k_4 = f\left(u_i + v_i d\phi + \frac{3}{7}k_1 - \frac{1}{14}k_2 + \frac{1}{7}k_3\right)d\phi^2, \quad (38)$$

$$u_{i+1} = u_i + v_i + \frac{1}{90}(7k_0 + 24k_1 + 6k_2 + 8k_3) + O(h^7), \quad (39)$$

$$v_{i+1}d\phi = v_i d\phi + \frac{1}{90}(7k_0 + 32k_1 + 12k_2 + 32k_3 + 7k_4) + O(h^8), \quad (40)$$

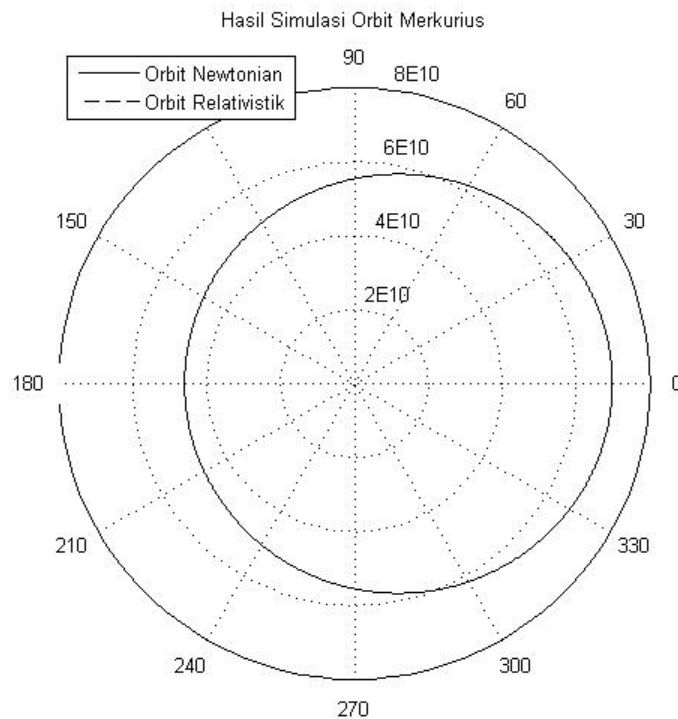
dimana  $f(u) = 1/\alpha - u$  untuk kasus Newtonian dan  $f(u) = 1/\alpha - u + \lambda\alpha u$  untuk kasus relativistik.

### Simulasi Orbit Newtonian sebagai Pembanding

Perbandingan antara hasil analitik Newtonian dan hasil simulasi akan digunakan untuk mengecek akurasi dari hasil simulasi.

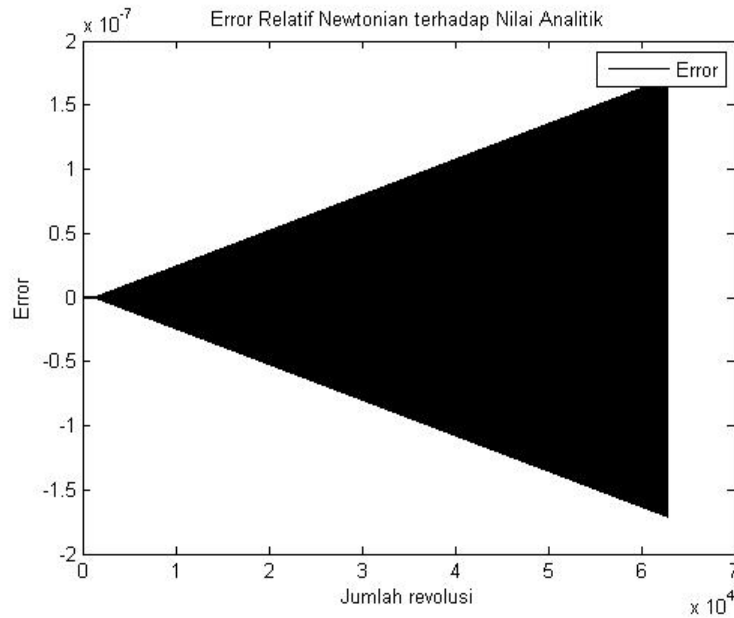
### Hasil

Simulasi dilakukan dengan menggunakan program MATLAB R2013b. Titik awal diambil pada aphelion Merkurius dengan jumlah data 1199 untuk tiap revolusi. Hasil simulasi orbit dapat dilihat pada gambar 1.



Gambar 1. Hasil simulasi orbit Merkurius.

Dari gambar 1 terlihat bahwa koreksi relativistik memiliki pengaruh yang sangat kecil dan tidak tampak secara langsung pada lintasan orbit. Oleh karena itu analisis lanjutan dari efek relativistik, baik karena alasan visual maupun numerik, tidak dapat dilakukan secara langsung melalui data tersebut. Analisis lanjutan kemudian dilakukan terhadap simpangan orbit daripada orbitnya sendiri.



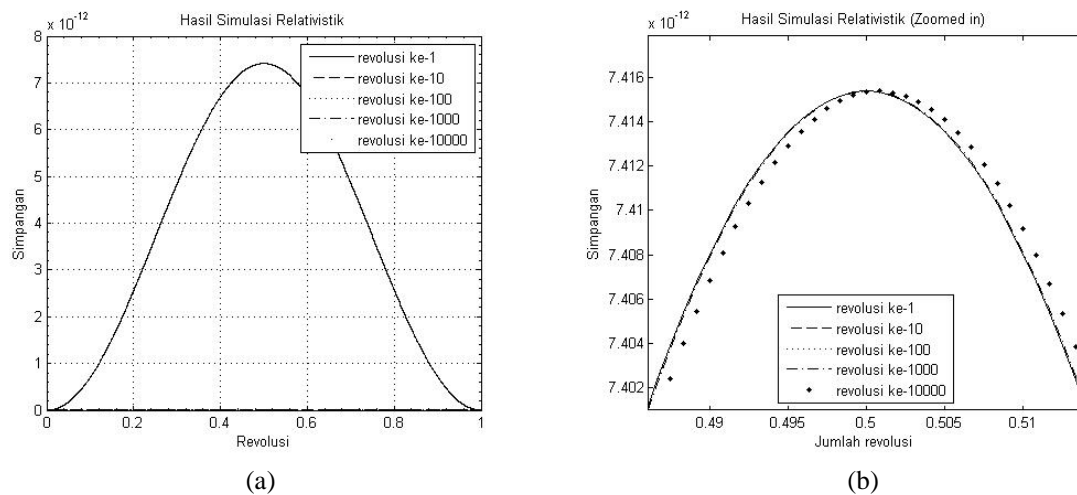
Gambar 2. Error Newtonian terhadap nilai analitik.

Gambar 2 menunjukkan nilai error numerik terhadap nilai analitik Newtonian, dimana Nilai rms error relatif untuk 10000 revolusi terhitung sebesar  $6.8633 \times 10^{-8}$ . Dari data juga terlihat bahwa terdapat propagasi error yang tumbuh dengan laju  $\approx 2 \times 10^{-11}$  per revolusi. Dengan mengasumsikan bahwa error numerik pada kasus Newtonian dan relativistik memiliki orde yang sama dan mengingat bahwa koreksi relativistik memiliki orde  $\approx 10^{-7}$ , dapat disimpulkan bahwa error pada kasus numerik relativistik hampir seluruhnya dihasilkan oleh koreksi relativistik setidaknya untuk 1000 revolusi pertama dan bahwa program simulasi telah mencapai akurasi yang dibutuhkan untuk tujuan yang ingin dicapai.

### Simulasi Orbit Relativistik

#### Hasil

Hasil simulasi orbit relativistik dapat dilihat pada gambar 3, dimana didefinisikan simpangan  $= u - u_{\text{minimum}}$ .



Gambar 3. Hasil simulasi relativistik. (b) zoomed-in.

## Analisis

Analisis dilakukan dengan melakukan curve fitting terhadap data menggunakan ekspansi deret Fourier orde satu. Deret Fourier dipilih sebagai basis ekspansi mengingat tiap suku persamaan orbit berbentuk sinusoidal.

Ekspansi deret Fourier orde satu memiliki bentuk

$$f(x) = a_0 + a_1 \cos wx + b_1 \sin wx, \quad (41)$$

dimana  $a_0$ ,  $a_1$ ,  $b_1$ , dan  $w$  merupakan koefisien fitting. Pergeseran puncak (perihelion) dapat dilihat dengan menulis ulang persamaan (44) dalam bentuk

$$f(x) = a_0 + k_1 \cos w(x - \theta), \quad (42)$$

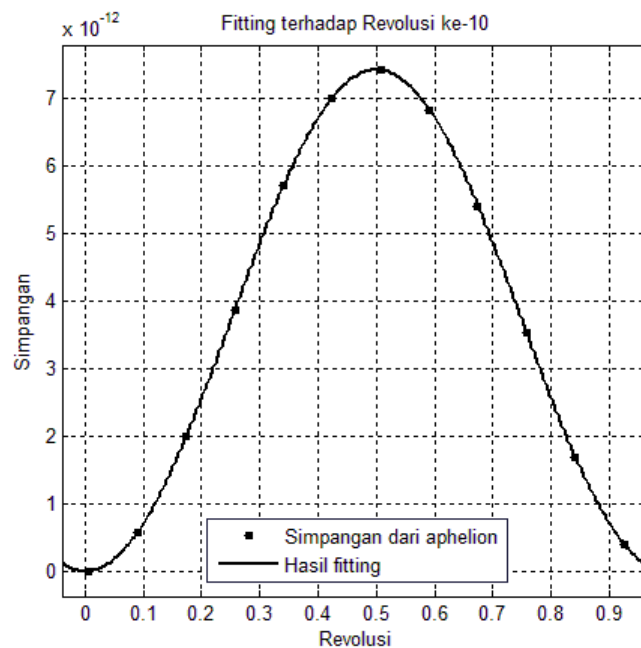
Dengan

$$k_1^2 = a_1^2 + b_1^2, \quad (43)$$

$$\theta = \frac{1}{w} \tan^{-1} \frac{b_1}{a_1}, \quad (44)$$

dimana  $\theta$  kemudian terlihat sebagai pergeseran puncak dalam satuan revolusi. Pergeseran puncak dalam radian dapat dihitung dengan

$$\theta(\text{radian}) = 2\pi\theta(\text{revolusi}) = \frac{2\pi}{w} \tan^{-1} \frac{b_1}{a_1}, \quad (45)$$



Gambar 5. Contoh *fitting* untuk revolusi ke-10.

Fitting dilakukan terhadap sampel revolusi ke-1, ke-5, ke-10, ke-50, ke-100, ke-500, ke-1000, ke-5000, dan ke-10000. Nilai koefisien fitting untuk tiap revolusi dapat dilihat pada tabel 3.

Pada gambar 6 dapat dilihat data dari tabel 4 dalam bentuk grafik. Data revolusi ke-1 dianggap sebagai outlier akibat kesalahan pengambilan nilai awal. Dari data tersebut kemudian dilakukan fitting secara linear ( $p_1x + p_2$ ) untuk mencari laju presesi per revolusi. Koefisien fitting yang didapat adalah  $p_1 = 9.987 \times 10^{-8}$ ,  $p_2 = 0.0004174$  dengan  $R^2 = 1$ . Dari hasil tersebut dapat diambil kesimpulan

$$\delta\phi = 7.987 \times 10^{-8} \text{ rev/rev} = 5.0184 \times 10^{-7} \text{ rad/rev} = 42.9768'' \text{ per abad}, \quad (49)$$

Tabel 3. Koefisien fitting terhadap data

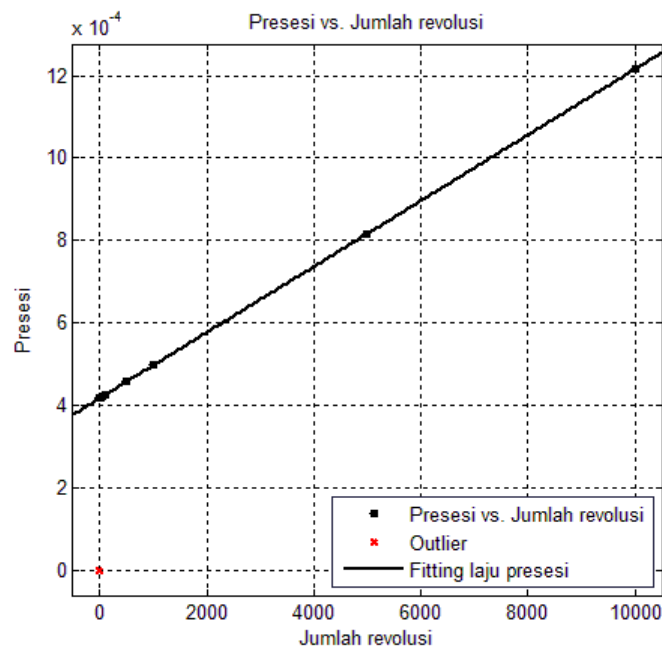
Revolusi ke-	$a_0$	$a_1$	$b_1$	$w$	$R^2$
1	3,711E-12	-3,708E-12	-9,304E-19	6,283	1



5	3,711E-12	-3,706E-12	-9,735E-15	6,288	1
10	3,711E-12	-3,706E-12	-9,745E-15	6,288	1
50	3,711E-12	-3,706E-12	-9,819E-15	6,288	1
100	3,711E-12	-3,706E-12	-9,912E-15	6,288	1
500	3,711E-12	-3,706E-12	-1,066E-14	6,288	1
1000	3,711E-12	-3,706E-12	-1,159E-14	6,288	1
5000	3,711E-12	-3,706E-12	-1,903E-14	6,288	1
10000	3,711E-12	-3,706E-12	-2,834E-14	6,288	1

Tabel 4. Pergeseran perihelion

Revolusi ke-	$\theta$
1	3,9936E-08
5	4,1775E-04
10	4,1818E-04
50	4,2136E-04
100	4,2535E-04
500	4,5744E-04
1000	4,9735E-04
5000	8,1661E-04
10000	1,2000E-03



Gambar 6. Presesi vs. Jumlah revolusi.

## KESIMPULAN

Pada skripsi ini telah digunakan metode Runge-Kutta orde 6 (RK6) yang dikembangkan oleh Scraton untuk mensimulasi sistem orbit Matahari-Merkurius. Data yang didapat kemudian dianalisis menggunakan aplikasi curve fitting terhadap ekspansi Fourier orde 1 dari program MATLAB untuk menghitung besar pergeseran perihelion.

Nilai yang didapatkan dari simulasi presesi perihelion Merkurius  $42.9768''$  per abad telah berhasil mendekati nilai perhitungan termutakhir  $42.9799 \pm 0.0009''$  per abad. Meski begitu, nilai yang didapatkan

masih belum dapat mencapai akurasi dari metode perturbasi  $42.9807''$  per abad, yang masih berada dalam jangkauan error.

## UCAPAN TERIMA KASIH

Penulis mengucapkan terima kasih kepada berbagai pihak yang telah membantu dalam penulisan makalah ini.

## REFERENSI

1. International Bureau of Weights and Measures., The International System of Units (SI), Bureau International des Poids et Mesures, 2006.
2. Jet Propulsion Laboratory, "Astrodynamical Constants," 13 December 2012. [Online]. Available: <https://ssd.jpl.nasa.gov/?constants>.
3. D. R. Williams, "Mercury Fact Sheet," 23 December 2016. [Online]. Available: <https://nssdc.gsfc.nasa.gov/planetary/factsheet/mercuryfact.html>.
4. R. S. Park, W. M. Folkner, A. S. Konopliv, J. G. Williams, D. E. Smith dan M. T. Zuber, "Precession of Mercury's Perihelion from Ranging to the MESSENGER Spacecraft," *The Astronomical Journal*, p. 121, 2017.
5. W. Greiner, Classical Mechanics, New York: Springer-Verlag, 2004.
6. T. P. Cheng, Relativity, Gravitation and Cosmology: A Basic Introduction (Oxford Master Series in Physics), Oxford: Oxford University Press, 2005.
7. L. Iorio, "Is it possible to measure the Lense-Thirring effect on the orbits of the planets in the gravitational field of the Sun?," *Astronomy & Astrophysics*, pp. 385-389, 2005.
8. C. Pollock, "Mercury's Perihelion," 2003.
9. R. D'Inverno, Introducing Einstein's relativity, Oxford: Clarendon Press, 1992.
10. L. Collatz, Initial-value problems in ordinary differential equations, Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 1960.
11. R. E. Scraton, "The Numerical Solution of Second-Order Differential Equations not Containing the First Derivative Explicitly," *The Computer Journal*, pp. 368-370, 1964.