

Simulasi Solusi Numerik Persamaan Gelombang 2D pada Membran Persegi Menggunakan Makro VBA Excel

Sitti Hadijah Binti Marfin^{1,a)}, Rina Asmarani^{2,b)}, Ernawati³⁾ dan Sparisoma Viridi^{4,c)}

^{1,2,3}Program Studi Magister Pengajaran Fisika,
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Institut Teknologi Bandung,
Jl. Ganesha no. 10 Bandung, Indonesia, 40132

⁴Kelompok Keilmuan Fisika Nuklir dan Biofisika,
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Institut Teknologi Bandung,
Jl. Ganesha no. 10 Bandung, Indonesia, 40132

^{a)}sittihadijahbintimarfin@students.itb.ac.id (corresponding author)

^{b)}rina.asmarani16@gmail.com

^{c)}dudung@fi.itb.ac.id

Abstrak

Gelombang dua dimensi (2D) merupakan rambatan getaran pada suatu permukaan air atau sebuah membran. Penelitian ini bertujuan untuk membuat simulasi persamaan gelombang 2D pada membran persegi menggunakan spreadsheet excel berbantuan makro VBA. Metode penelitian yang digunakan adalah mengembangkan solusi numerik gelombang 2D pada membran persegi menggunakan aturan 1/3 simpson. Penentuan solusi ini menggunakan syarat batas $u(0,y,t) = u(a,y,t) = u(x,0,t) = u(x,b,t)$ untuk semua waktu t dan tanpa kecepatan awal, serta syarat awal memiliki simpangan $f(x,y) = x(x-1)y(y-1)$. Hasil yang diperoleh berupa gelombang 2D pada membran persegi berupa grafik $u(x,y,t)$ terhadap waktu t dan grafik $u(x,y,t)$ terhadap modus mn .

Kata-kata kunci: Persamaan gelombang 2D, membran persegi, makro VBA excel

PENDAHULUAN

Perkembangan ilmu pengetahuan fisika terbentuk berdasarkan serangkaian pengamatan dari hukum-hukum alam yang disajikan dalam bentuk persamaan matematis. Pemodelan gejala fisika secara matematis dapat menimbulkan kesulitan bagi peserta didik untuk memahami makna fisis dari fenomena alam yang sesungguhnya terjadi, misalnya fenomena gelombang. Gelombang merupakan suatu vibrasi yang merambat dan terjadi karena adanya gangguan pada objek tertentu. Fenomena ini dapat ditemukan pada gelombang permukaan air. Gelombang air dua dimensi merupakan rambatan getaran pada sebuah membran permukaan air. Akan tetapi, dalam penelitian ini membran diasumsikan berbentuk persegi dan pemodelan matematis gelombang dinyatakan dalam persamaan diferensial parsial.

Sejatinya dalam memahami model matematis sangat erat hubungannya dengan abstraksi. Kegagalan dalam proses abstraksi akan menyebabkan tidak dipahaminya fenomena atau konsep fisika yang sedang dipelajari, sehingga bisa mengarahkan pada miskonsepsi jika konsep tersebut dipaksakan untuk dipahami. Cara agar dapat memahami dengan benar proses abstraksi ini adalah menggunakan komputer untuk menampilkan visualisasi

dan simulasi gejala fisiknya. Perkembangan teknologi komputer saat ini, baik dalam hal perangkat keras maupun perangkat lunak menjadikan pembuatan visualisasi dan simulasi keadaan fisik menjadi lebih mudah. Contohnya persamaan gelombang dua dimensi pada membran persegi menggunakan *Matlab* [1] dan *Cellular Automaton* dalam mendeskripsikan bentuk fisik dari persamaan gelombang tersebut [8].

Salah satu media inovatif pembuatan simulasi adalah *spreadsheet excel* dengan aplikasi makro *Visual Basic for Application* (VBA). Program VBA dapat membantu kemampuan *excel* untuk melakukan otomatisasi dan menambahkan fungsi-fungsi yang dapat didefinisikan oleh pengguna di dalam *spreadsheet*. Simulasi dengan menggunakan media *spreadsheet* sangat efektif untuk membantu peserta didik belajar, sebab simulasi tersebut tidak hanya menampilkan lukisan grafik yang terbentuk, namun sama seperti melakukan percobaan dalam laboratorium [7]. Telah banyak peneliti yang mengembangkan dan meneliti masalah fisika dengan menggunakan *Spreadsheet* seperti Pengembangan Media Pembelajaran *Spreadsheet Excel* Materi Gerak untuk Meningkatkan Kemampuan Berpikir Tingkat Tinggi [4], Media Pembelajaran menggunakan *Spreadsheet Excel* untuk Materi Osilasi Harmonik Teredam [5], Pemodelan Numerik Gerak Jatuh Bebas dengan Menggunakan *Spreadsheet Excel* [2], dan masih banyak lagi.

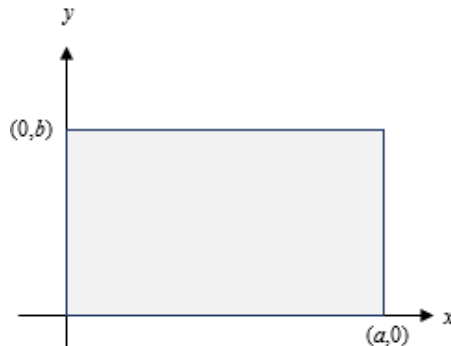
Pembuatan simulasi dalam persamaan gelombang dua dimensi pada umumnya menggunakan program aplikasi *Matlab* atau *Femlab* yang menggunakan bahasa pemrograman yang relatif sulit dan dibutuhkan keahlian khusus untuk menggunakannya, maka penulis ingin menunjukkan bahwa makro VBA *excel* yang penggunaannya sederhana dan mudah didapatkan juga mampu bersanding dengan aplikasi-aplikasi matematik lainnya dalam komputer.

METODE

Persamaan gelombang 2D pada membran persegi memiliki solusi $u(x, y, t)$ pada titik x, y dan waktu $t \geq 0$ [1]. Persamaan gelombang 2D yang berbentuk persamaan diferensial orde dua diberikan

$$\frac{\partial^2 u(x, y, t)}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 u(x, y, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y, t)}{\partial y^2} \right) \quad (1)$$

Membran persegi yang sisi-sisinya diasumsikan memiliki panjang a dan lebar b ditunjukkan seperti gambar 1.



Gambar 1. Panjang dan lebar membran persegi

syarat batas yang digunakan pada membran persegi ditunjukkan pada persamaan (2) berikut:

$$\begin{aligned} u(0,y,t)=0; \quad u(a,y,t)=0 \quad 0 \leq y \leq b \quad \& \quad t \geq 0 \\ u(x,0,t)=0; \quad u(x,b,t)=0 \quad 0 \leq x \leq a \quad \& \quad t \geq 0 \end{aligned} \quad (2)$$

dan syarat awal

$$f(x,y) = x(x-a)y(y-b) \quad (3)$$

dengan menggunakan metode pemisahan variabel, defleksi $u(x, y, t)$ dapat dipisahkan menjadi

$$u(x, y, t) = X(x)Y(y)T(t) \quad (4)$$

Persamaan (4) merupakan perkalian tiga fungsi persamaan diferensial biasa, masing-masing fungsi hanya bergantung pada satu variabel yaitu $X(x)$ untuk fungsi dari x , $Y(y)$ untuk fungsi dari y dan $T(t)$ untuk fungsi dari t . Solusi umum defleksi $u(x, y, t)$ diberikan

$$u(x, y, t) = \left(\sin \frac{m\pi}{a} x \right) \left(\sin \frac{n\pi}{b} y \right) (A \sin \omega t + B \cos \omega t) \quad (5)$$

Berdasarkan prinsip superposisi, solusi umum persamaan (5) yang memenuhi persamaan (2) adalah

$$u_{mn}(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (A_{mn} \sin \omega_{mn} t + B_{mn} \cos \omega_{mn} t) \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (6)$$

dan yang memenuhi persamaan (3) adalah

$$f(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} B_{mn} \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y \quad (7)$$

dan

$$g(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \omega_{mn} \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y \quad (8)$$

ω_{mn} disebut sebagai karakteristik frekuensi pada membran dan koefisien A_{mn} dan B_{mn} disebut koefisien deret Fourier.

Jika diasumsikan kondisi awal membran sebagai

$$f(x, y) = x(x-1)y(y-1) \quad (9)$$

dan

$$g(x, y) = 0 \quad (10)$$

maka konsekuensi dari persamaan (9) dan persamaan (10) menginformasikan nilai A_{mn} sama dengan nol, sehingga persamaan (6) rekursif dengan

$$u_{mn}(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (B_{mn} \cos \omega_{mn} t) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (11)$$

Berdasarkan persamaan (7), koefisien B_{mn} diperoleh

$$B_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b f(x, y) \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y dx dy \quad (12)$$

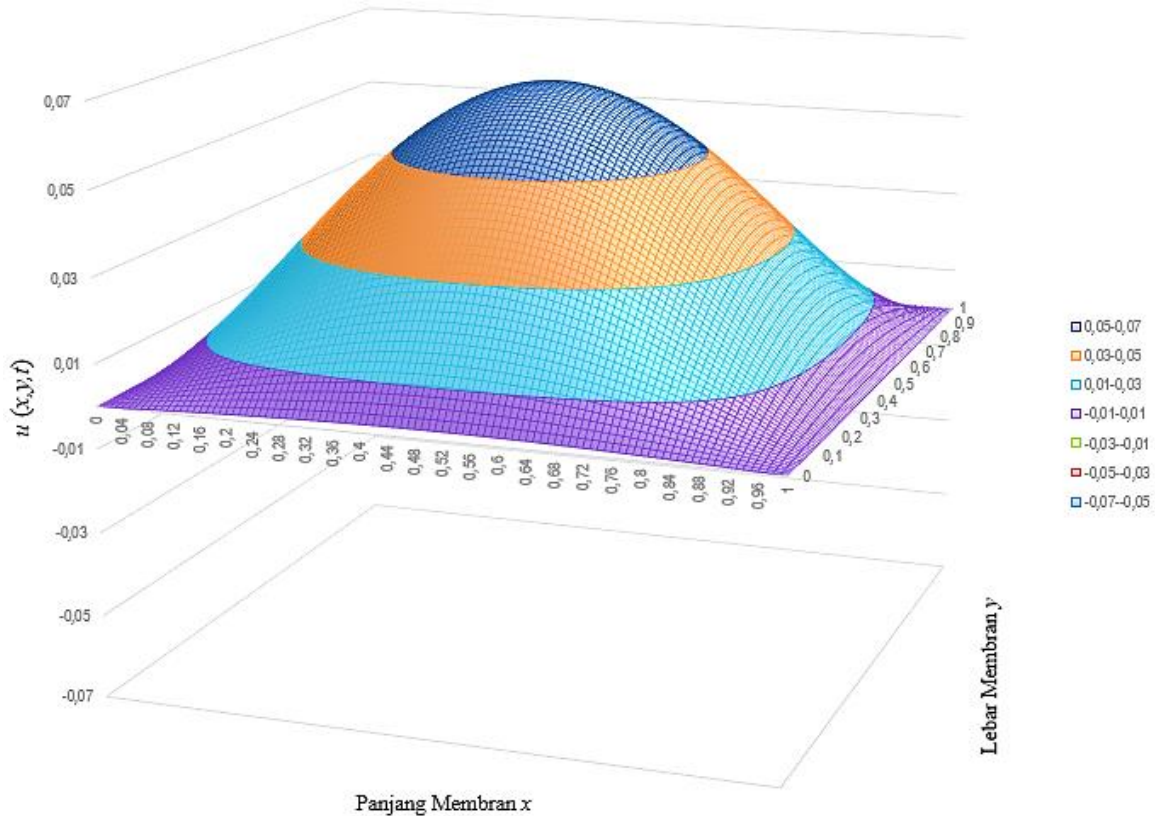
SOLUSI NUMERIK PERSAMAAN GELOMBANG 2D PADA MEMBRAN PERSEGI

Solusi Numerik Persamaan Gelombang 2D pada Membran Persegi Terhadap Waktu t

Aturan 1/3 Simpson merupakan formula Newton-Cotes untuk mengaproksimasi nilai integral dari fungsi menggunakan polinomial orde dua (kuadratik) [6]. Fungsi integral diberikan oleh

$$I \cong \frac{h}{3} \left[f(x_0) + 4 \sum_{i=1,3,5,\dots}^{n-1} f(x_i) + 2 \sum_{j=2,4,6,\dots}^{n-2} f(x_j) + f(x_n) \right] \quad (13)$$

Berdasarkan persamaan (13) maka solusi numerik persamaan (11) dalam makro VBA *excel* ditunjukkan seperti gambar 2.

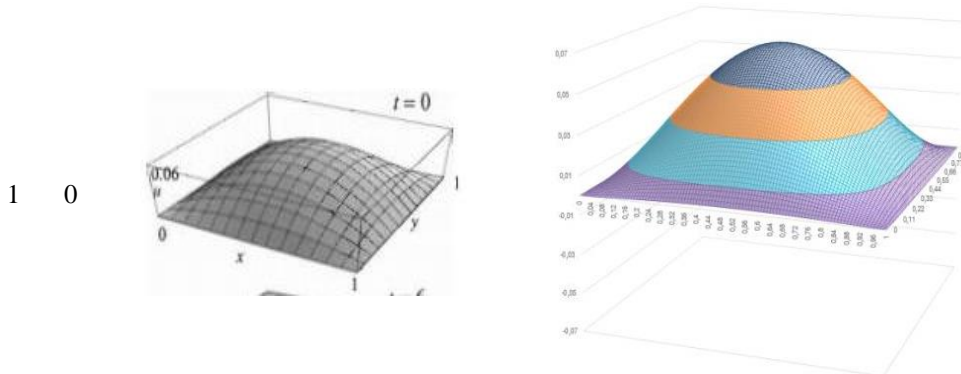


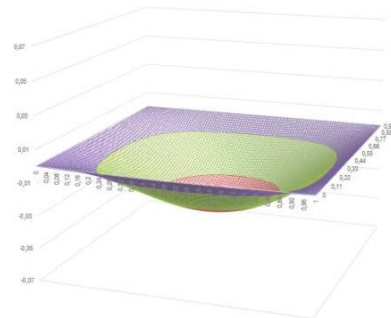
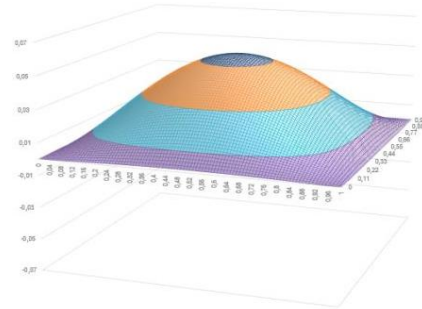
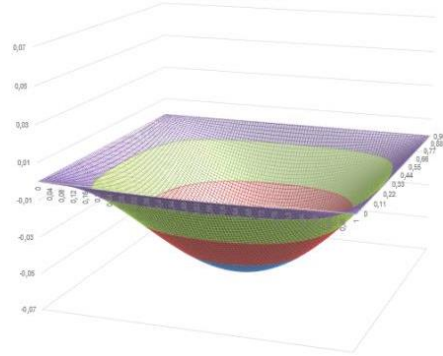
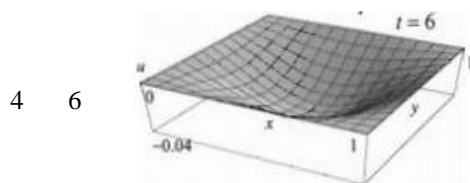
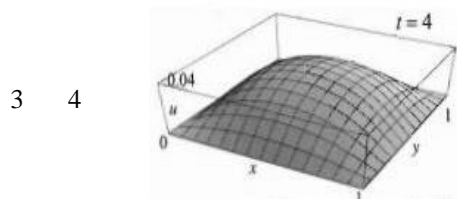
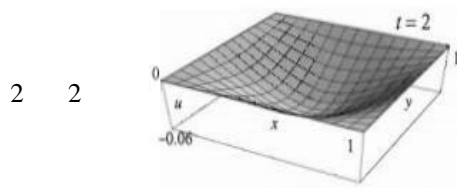
Gambar 2. Gelombang 2D pada membran persegi menggunakan makro VBA excel

Gambar 2 memperlihatkan deskripsi kondisi awal membran persegi yang memiliki panjang $a = 1$ dan lebar $b = 1$, serta simpangan awal $f(x,y)$ dengan nilai B_{mn} sekitar 0,05-0,06 menggunakan makro VBA excel.

Perbandingan persamaan gelombang 2D pada membran persegi menggunakan *Matlab* [1] dengan menggunakan makro VBA excel persamaan gelombang 2D pada membran persegi dapat dilihat pada tabel 1.

Tabel 1. Perbandingan bentuk gelombang 2D menggunakan *Matlab* dan makro VBA excel terhadap waktu t

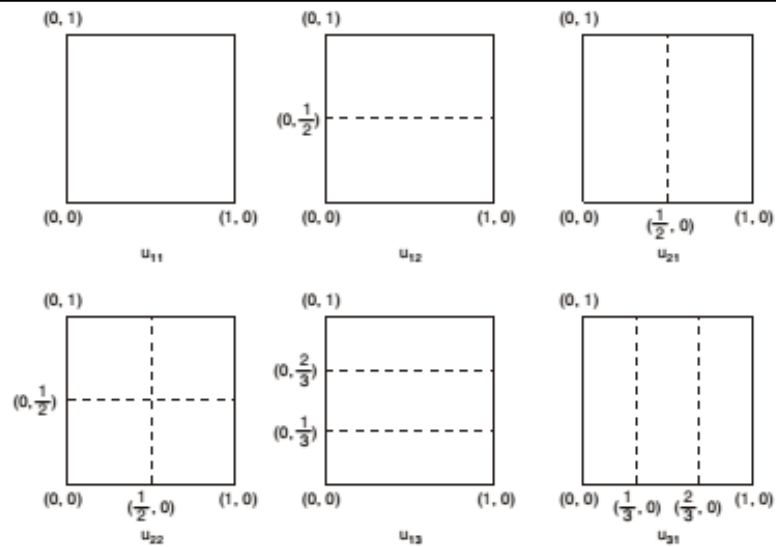




Tabel 1 mendemonstrasikan bentuk gelombang 2D pada membran persegi menggunakan *Matlab* dan makro VBA *excel*. Pada waktu t sama dengan 0, 2, 4, dan 6, bentuk gelombang terlihat mirip, namun amplitudo B_{mn} memiliki nilai yang tidak jauh berbeda dimana untuk masing-masing waktu t sekitar 0,05 s/d 0,07, -0,05 s/d -0,07, 0,03 s/d 0,05, dan -0,03 s/d -0,05. Hal ini dikarenakan solusi yang digunakan dalam menggambarkan bentuk gelombang menggunakan *Matlab* berbeda dengan menggunakan makro VBA *Excel*. *Matlab* menggunakan solusi analitik [1].

Simulasi Solusi Numerik Persamaan Gelombang 2D pada Membran Persegi Terhadap Modus mn

Modus mn memiliki hubungan atau kemiripan tetapi berbeda antara m dan n [3]. Jika modus $m = 1$ dan $n = 2$ maka panjang membran pada sumbu- x memiliki 2 garis simpul/lembah dan lebar membran pada sumbu- y memiliki 3 garis simpul/lembah ($x = \frac{1}{2}$), begitupun sebaliknya jika modus $m = 2$ dan $n = 1$ maka panjang membran pada sumbu- x memiliki 3 garis simpul/lembah ($y = \frac{1}{2}$) dan lebar membran pada sumbu- y memiliki 2 garis simpul/lembah. Untuk lebih jelasnya dapat dilihat pada gambar 5.

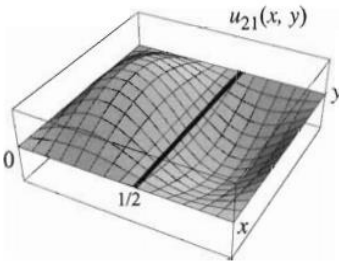

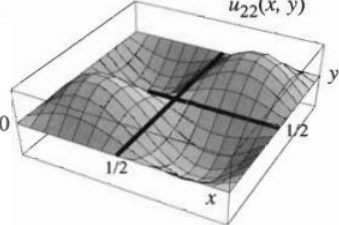
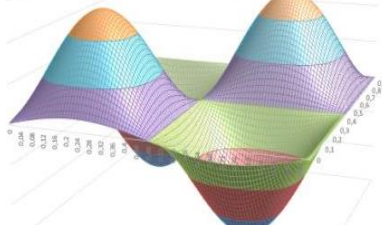
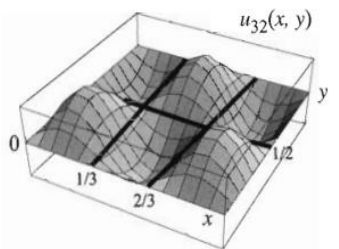
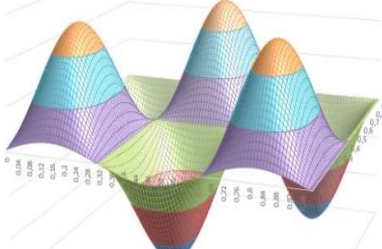


Gambar 5. Modus mn

Gambar 5 memperlihatkan bahwa modus mn berbeda. Modus m ataupun n memiliki jumlah garis simpul/lembah plus 1. Jika m ataupun n sama dengan 1, maka jumlah garis simpul/lembah yaitu $(m = n = 1) + 1 = 2$, dan seterusnya.

Perbandingan u_{mn} pada membran persegi disimulasikan menggunakan *Matlab* dan makro VBA *excel* diperlihatkan pada tabel 2.

Tabel 2. Perbandingan Gelombang 2D menggunakan *Matlab* dan makro VBA *excel* terhadap modus mn

u_{mn}	<i>Matlab</i>	<i>Makro VBA excel</i>
1 u_{21}		
2 u_{22}		
3 u_{32}		

HASIL PERHITUNGAN B_{MN} GELOMBANG 2D PADA MEMBRAN PERSEGI SECARA ANALITIK DAN NUMERIK

Perhitungan persamaan gelombang 2D pada membran persegi dilakukan secara numerik dengan analitis. Data hasil perhitungan persamaan gelombang 2D pada membran persegi dapat dilihat pada tabel 3 berikut.

Tabel 3. Hasil perhitungan B_{mn} secara analitik dan numerik

	m	n	B_{mn} Analitik	B_{mn} Numerik	Kesalahan Relatif (%)
1	1	1	0,066773184	0,06660624	0,250016534
2	1	2	0,008346648	4,17099E-05	99,50027963
3	2	1	0,008346648	4,17099E-05	99,50027963
4	2	2	0,001093331	2,61194E-08	99,99761103
5	1	3	0,002473081	0,002442181	1,249453617
6	3	1	0,002473081	0,002442181	1,249453617
7	2	3	0,000309135	1,52933E-06	99,50528733
8	3	2	0,000309135	1,52933E-06	99,50528733
9	3	3	9,15956E-05	8,95449E-05	2,238863002

Hasil perhitungan numerik dengan aturan 1/3 Simpson memberikan gambaran data yang cukup baik ketika modulus m dan n bernilai ganjil. Tingkat kesalahan relatif terhadap data eksperimen di bawah 10%, namun memberikan kesalahan mendekati 100% jika modulus m ataupun n bernilai genap.

KESIMPULAN

Persamaan gelombang 2D pada membran persegi dapat disimulasikan menggunakan makro VBA Excel menggunakan solusi numerik dengan metode aturan 1/3 Simpson. Aturan ini memberikan alternatif metoda yang cukup akurat dalam melakukan proses perhitungan solusi numerik untuk modulus m dan n bernilai ganjil. Tingkat kesalahan relatif dibandingkan dengan solusi analitik bernilai dibawah 10%, namun aturan ini tidak dianjurkan untuk modulus m ataupun n yang bernilai genap.

UCAPAN TERIMA KASIH

Penulis mengucapkan terima kasih kepada berbagai pihak yang telah membantu dalam penulisan makalah ini.

REFERENSI

1. Asmar, Partial Differential Equations, with Fourier Series and Boundary Value Problems, Pearson Prentice Hall, USA (2005)
2. *Buhera*, Pemodelan Numerik Gerak Jatuh Bebas dengan Menggunakan Spreadsheet Excel, Universitas Halu Oleo, Kendari (2015)
3. Chauduri, Waves and Oscillations (Second Edition), New Age International Publishers, New Delhi (2010)
4. Handayani, Pengembangan Media Pembelajaran Spreadsheet Excel Materi Gerak untuk Meningkatkan Kemampuan Berpikir Tingkat Tinggi, UNS, Semarang (2013)
5. Paramita, Media Pembelajaran Menggunakan Spreadsheet Excel untuk Materi Osilasi Harmonik Teredam, Prosiding Seminar Nasional Fisika dan Pendidikan Fisika (SNFPF) Volume 6 Nomor 1 2015, ISSN 2302-7827, (2015)
6. Setiawan, Pengantar Metode Numerik, Penerbit ANDI, Yogyakarta (2006)
7. Tombade, Use of Spreadsheet for the Perturbation Theory Quantum Harmonic Oscillator, European Journal of Applied Sciences, 3(4) 117-124 (2011)
8. Trujillo, Simulation of Vibrant Membranbe Using a 2-Dimensional Cellular Automaton, Hindawi Publishing Corporation (2015)